Przypomnienie

1. Miara zewnętrzna μ na X jest regularna, gdy dla każdego $E \subset X$ istnieje $F \supset E$ mierzalny tż. $\mu(F) = \mu(E)$.

2. Jeżeli μ jest miarą zewn. na X, $\mathcal{F}$ to σ-ciało zbiorów μ-mierzalnych oraz ν jest miarą zewn. na Y, z $\mathcal{G}$ - σ-ciałem zbiorów ν-mierzalnych, to na $X \times Y$ możemy wprowadzić miarę zewn. produktową

$$\mu \times \nu : 2^{X \times Y} \longrightarrow [0, \infty],$$

$$\mu \times \nu (E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : \begin{array}{l} A_i \in \mathcal{F},\ B_i \in \mathcal{G} \\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \end{array} \right\}$$

Zadanie: Sprawdzić, że $\lambda_n = \underbrace{\lambda_1 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1}_{n \text{ razy}}$.

Twierdzenie Fubiniego: Niech μ będzie miarą zewn. na X, ν - miarą zewn. na Y i niech $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ oznaczają, jak wyżej, σ-ciała zbiorów odp. μ-mierzalnych w X i ν-mierzalnych w Y.

1. Miara $\overset{\text{zewn.}}{\mu \times \nu}$ jest regularna (nawet gdy μ i ν nie są)
2. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$, to $A \times B$ jest $\mu \times \nu$-mierzalny i $\mu \times \nu (A \times B) = \mu(A)\nu(B)$

Dk.

Kolejne przypomnienie i definicja:

- Miara zewn. μ na X jest <u>σ-skończona</u>, gdy X jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów o mierze skończonej
- Podzbiór $A \subset X$ jest <u>σ-skończony</u>, gdy jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów o mierze skończonej
- funkcja mierzalna $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest <u>σ-skończona</u>, gdy $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ jest <u>σ-skończony</u>

<u>Uwaga:</u> 1. λ_n na $\mathbb{R}^n$ jest σ-skończona, więc każdy podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest σ-skończony i każda funkcja mierzalna wzgl $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ jest σ-skończona.

2. Jeżeli $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest całkowalna, to jest σ-skończona.

3. Niech $S \subset X \times Y$ będzie σ-skończony wzgl. $\mu \times \nu$.

Wówczas

a) dla ν-p.w. $y \in Y$ $S_y = \{x \in X : (x,y) \in S\} \in \mathcal{F}$

b) dla μ-p.w. $x \in X$ $S_x = \{y \in Y : (x,y) \in S\} \in \mathcal{G}$

(czyli przekroje E są mierzalne na p.w. poziomach)

c) $$\mu \times \nu (S) = \int_Y \mu(S_y)\, d\nu(y) = \int_X \nu(S_x)\, d\mu(x).$$

4. Jeżeli f jest mierzalna wzgl. $\mu \times \nu$ i σ-skończona wzgl. tej miary oraz istnieje całka $\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu)$, to

a) Jeżeli $y \xmapsto{F} \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$,

to istnieje $\int_Y F(y)\, d\nu(y)$

b) jeżeli $x \stackrel{G}{\longmapsto} \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, to istnieje $\int_X G\,d\mu$

c) $$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

$$= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

To koniec sformułowania tw. Fubiniego.

W szczególności zachodzi ono gdy $X = \mathbb{R}^k$, $\mu = \lambda_k$, $Y = \mathbb{R}^m$, $\nu = \lambda_m$; $X\times Y = \mathbb{R}^{k+m}$, $\mu\times\nu = \lambda_{k+m}$ i funkcja f jest całkowalna wzgl. λ_{k+m} lub mierzalna i nieujemna.

No to dowód:

Niech $\mathcal{H}$ oznacza rodzinę tych podzbiorów $S\subset X\times Y$, dla których (•) $\forall_{y\in Y}$ istnieje całka $\int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x)$

oraz (••) istnieje całka $\int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Dla $S\in\mathcal{H}$ definiujemy $\varrho(S) = \int_Y \left(\int_X \chi_S(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Niech $\mathcal{P}_0 = \{ A \times B : A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G} \}$

$$\mathcal{P}_1 = \Big\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j : S_j \in \mathcal{P}_0 \Big\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \Big\{ \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j : S_j \in \mathcal{P}_1 \Big\}$$

Zauważmy, że $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{H}$, bo każdy przekrój zbioru $A \times B$ (przy ustalonym $y \in B$) jest izomorficzny z A, więc $\int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) = \mu(A) \cdot \chi_B(y)$,

$$\rho(A \times B) = \int_Y \Big(\int_X \chi_S(x,y)\, d\mu(x) \Big) d\nu(y) = \mu(A)\mu(B).$$

Zauważmy dalej, że jeżeli $A_1 \times B_1$ i $A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}_0$, to $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}_0$

oraz $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (\underbrace{A_1 \setminus A_2 \times B_1}_{\in \mathcal{P}_0}) \cup (\underbrace{A_1 \cap A_2 \times B_1 \setminus B_2}_{\in \mathcal{P}_0})$

te zbiory są rozłączne.

Z własności całki od razu dostajemy, że rozłączna suma przeliczalnie wielu elementów z $\mathcal{H}$ znów należy do $\mathcal{H}$, w szczególności gdy $S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0$, to, z rachunku powyżej, $S_1 \cap S_2$ oraz $S_1 \setminus S_2 \in \mathcal{H}$.

Wykażemy teraz, że $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{H}$.

Każdy element z $\mathcal{P}_1$ jest przeliczalną sumą elementów z $\mathcal{P}_0$; korzystając z części wspólnych i różnic możemy zastąpić tę sumę sumą rozłączną:

gdy $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$, $S_j \in \mathcal{P}_0$, to kładąc $A_1 = S_1$, $A_2 = S_2 \setminus S_1$

$$A_3 = S_3 \setminus (S_1 \cup S_2) = \underline{(S_3 \setminus S_1)} \cap \underline{(S_3 \setminus S_2)}$$

to są rozłączne sumy elementów z $\mathcal{P}_0$

itd, dostajemy $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathcal{P}_0$, A_j rozłączne, skąd $S \in \mathcal{H}$, a więc $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{H}$.

<u>Lemat 1</u>. Dla każdego $S \subset X \times Y$

$$\mu \times \nu(S) = \inf\{\rho(R) : S \subset R,\ R \in \mathcal{P}_1\}.$$

<u>Dowód lematu</u>: Z monotoniczności całki, jeżeli $S \subset R = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$, to $\rho(R) =$

$$= \int_Y \int_X \chi_R(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_Y \int_X \chi_{A_i \times B_i}(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i \times B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)$$

więc $\inf\{\rho(R) : S \subset R,\ R \in \mathcal{P}_1\} \leq \mu \times \nu(S)$.

$\mu \times \nu(S) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : S \subset \bigcup_i A_i \times B_i,\ A_i \in \mathcal{F},\ B_i \in \mathcal{G}\}$

Z drugiej strony, postępując jak wcześniej, każde $R \in \mathcal{P}_1$ możemy przedstawić jako <u>rozłączną</u> sumę elementów $\mathcal{P}_0$: $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' \times B_i'$, gdzie $A_i' \times B_i'$ są parami rozł.

Wtedy $\rho(R) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i' \times B_i') = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i')\nu(B_i') \geq \mu \times \nu(S)$,

gdy $S \subset R$

co daje (po przyłożeniu $\inf_R$) przeciwną nierówność, $\square$.

Udowodnimy teraz 1.

Ustalmy $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Wtedy oczywiście dla każdego $R \in \mathcal{P}_1$, $R \supset A \times B$ mamy

$$\mu \times \nu (A \times B) \leq \mu(A)\nu(B) = \varrho(A \times B) \leq \varrho(R)$$

więc

$$\mu \times \nu (A \times B) \leq \mu(A)\nu(B) \leq \underbrace{\inf\{\varrho(R) : A \times B \subset R \in \mathcal{P}_1\}}_{\overset{\text{Lemat 1}}{=}\ \mu \times \nu (A \times B)}.$$

Do dowodu 2. potrzebujemy jeszcze mierzalności $A \times B$.

Weźmy dowolny $T \subset X \times Y$. Dla każdego $R \supset T$, $R \in \mathcal{P}_1$, zbiory $R \setminus (A \times B)$ i $R \cap (A \times B)$ są rozłączne i należą do $\mathcal{P}_1$, więc

$$\mu \times \nu (T \setminus (A \times B)) + \mu \times \nu (T \cap (A \times B)) \leq$$

$$\leq \mu \times \nu (R \setminus (A \times B)) + \mu \times \nu (R \cap (A \times B))$$

$$\leq \varrho(R \setminus (A \times B)) + \varrho(R \cap (A \times B)) = \varrho(R)$$

z Lematu

więc $$\mu \times \nu (T \setminus (A \times B)) + \mu \times \nu (T \cap (A \times B)) \leq \underbrace{\inf\{\varrho(R) : T \subset R,\ R \in \mathcal{P}_1\}}_{=\ \mu \times \nu (T)}$$

Jak zwykle w warunku ~~mier.~~ Carathéodory'ego, odwrotna nierówność jest oczywista. To dowodzi mierzalności $A \times B$.

Zbiory z $\mathcal{P}_2$ są mierzalne (bo, na mocy 1., te z $\mathcal{P}_0$ są mierzalne). Jeżeli więc wykażemy, że

$\mu\times\nu(R) = \mu\times\nu(S)$ (R i S jak w Lemacie 2.),

to wykażemy 1.

Mamy oczywiście $\mu\times\nu(S) \leq \mu\times\nu(R)$, bo $R\supset S$.

Mamy też, z Lematu 1,

$$\mu\times\nu(R) \leq \rho(R_j) < \mu\times\nu(S) + \frac{1}{j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu\times\nu(S)$$

Lemat 2

Dla każdego $S\subset X\times Y$ istnieje $R\in\mathcal{P}_2$ t.ż. $S\subset R$,

$$\rho(R) = \mu\times\nu(S).$$

Dowód: Jeżeli $\mu\times\nu(S) = +\infty$, możemy przyjąć $R = X\times Y$.

Jeżeli $\mu\times\nu(S) < \infty$, to z Lematu 1. dla każdego j istnieje $R_j\in\mathcal{P}_1$ t.ż. $S\subset R_j$ oraz

$$\rho(R_j) < (\mu\times\nu)(S) + \frac{1}{j}$$

Kładziemy $R = \bigcap_{j=1}^{\infty} R_j$, wtedy $S\subset R$, $R\in\mathcal{P}_2$;

dla każdego $k\in\mathbb{N}$ $\mu\times\nu(S) \leq \rho(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{k} R_j}_{\in\mathcal{P}_1}) \xrightarrow{k\to\infty} \rho(R)$

z tw. o zbieżności zmajoryzowanej; $\chi_{\bigcap_{j=1}^{k} R_j} \leq \chi_{R_1}$

W szczególności całki w def. $\rho(R)$ istnieją $\Rightarrow R\in\mathcal{H}$.

ale też $\rho(\bigcap_{j=1}^{k} R_j) \leq \rho(R_k) \leq \mu\times\nu(S) + \frac{1}{k}$ $\forall_k$

więc $\rho(R) \leq \mu\times\nu(S)$. □

W szczególności dla p.w. $y \in Y$

$$(*)\quad \mu(\{x\in X: (x,y)\in S\}) \le \mu(\{x\in X: (x,y)\in R\}) \le \mu(\{x\in X: (x,y)\in S\}) + \underbrace{\mu(\{x\in X: (x,y)\in R\setminus S\})}_{=0}$$

więc $\mu(\{x\in X: (x,y)\in S\}) = \mu(\{x\in X: (x,y)\in R\})$ ν – p.w.

i $$\mu\times\nu(S) = \rho(R) = \int_Y \mu(\{x\in X: (x,y)\in R\})\, d\nu(y) =$$

$$= \int_Y \mu(\{x\in X: (x,y)\in S\})\, d\nu(y)$$

z (*) wynika w szczególności, że zbiory S_y są mierzalne dla p.w. y, jako różnice zbioru $R_y = \{x\in X: (x,y)\in R\}$, który jest mierzalny, bo $R\in\mathcal{H}$ i zbioru miary zero.

Przypadek $\mu\times\nu(S) = +\infty$ załatwiamy, przedstawiając S jako rozłączną sumę przeliczalnie wielu zbiorów mierzalnych o mierze skończonej (bo S jest σ-skończony).

3. jest równoważne 4. z $f = \chi_S$.

Dla ogólnego f nieujemnego, σ-skończonego zauważamy, że gdy przedstawimy f jako

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$$

$$A_k = \left\{ (x,y) \in X \times Y \; : \; f(x,y) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$$

to zdefiniowane tak A_k będą σ-skończone i teza punktu 4. dostajemy wprost z liniowości całki i tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.

Przypadek f, która niekoniecznie jest nieujemna, załatwiamy rozkładając $f = f_+ - f_-$ i korzystając z liniowości całki. To dowodzi 4. i kończy dowód twierdzenia.

Wnioski z tw. Fubiniego i zamiany zmiennych

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

1. Zasada Cavalierego
(klasyczna, znana już Archimedesowi)

Jeżeli $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ mają dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$

przekroje $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A\}$

i $B_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in B\}$

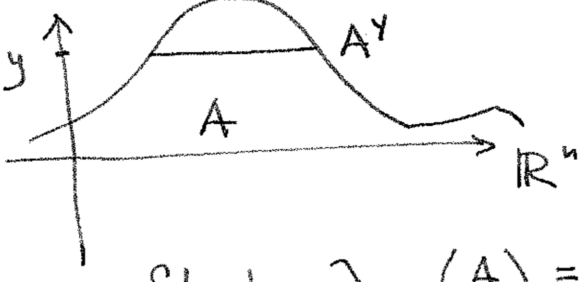
równej miary: $\lambda_m(A_x) = \lambda_m(B_x)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^n$

to $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$.

<u>Dowód</u>

$$\lambda_{n+m}(A) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(A_x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(B_x)\, d\lambda_n(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \lambda_{n+m}(B)$$

2. Zastosujmy zasadę Cavalierego (a raczej tw. Fubiniego) do podwykresu funkcji nieujemnej



$$A^Y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > y\}.$$

Stąd
$$\lambda_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > y\}}_{A^Y})\, d\lambda_1(y) =$$

$$\lambda_{n+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > y\})\, d\lambda_1(y)$$

3. Ogólniejsza wersja (też znana jako <u>zasada Cavalierego</u>)

Jeśli μ jest miarą $\overset{\text{zewn.}}{\sigma}$-skończoną na X i $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest rosnąca, klasy C^1 i $\Phi(0) = 0$, to dla każdej mierzalnej $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_X \Phi(|f|)\, d\mu = \int_0^\infty \Phi'(t)\, \mu(\{|f| > t\})\, d\lambda_1(t).$$

<u>Dowód</u>:

$$\int_X \Phi(|f|)\, d\mu = \int_X \int_0^{|f(x)|} \Phi'(t)\, d\lambda_1(t)\, d\mu(x) =$$

$$A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \le t < |f(x)|\}$$

$$= \int_X \int_0^\infty \Phi'(t) \cdot \chi_A(x,t)\, d\lambda_1(t)\, d\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_0^\infty \int_X \Phi'(t)\, \chi_A(x,t)\, d\mu(x)\, d\lambda_1(t) =$$

$$= \int_0^\infty \Phi'(t) \int_X \chi_{\{|f(x)| > t\}}(x,t)\, d\mu(x)\, d\lambda_1(t) = \int_0^\infty \Phi'(t)\, \mu(\{|f| > t\})\, d\lambda_1(t)$$

W szczególności: dla $\Phi(t) = t$ dostajemy wzór 2.

Dla $\Phi(t) = t^p$ dostajemy

$$\int_X |f|^p\, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{|f| > t\})\, d\lambda_1(t).$$

4. Reguła Pappusa-Guldina

Pappus z Aleksandrii
~(290-350)
Paul Habakuk Guldin (1577-1643)

<u>Def</u>: Środek ciężkości zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^n$ względem miary μ, o mierze dodatniej ($\mu(A) > 0$), nazywamy punkt $s(A)$ o współrzędnych

$$s(A)_i = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_i \, d\mu(x) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Zbiór A ma środek ciężkości $s(A)$, gdy wszystkie powyższe całki istnieją i są skończone.

<u>Twierdzenie</u> (reguła Pappusa-Guldina)

Niech A będzie mierzalnym (wzgl. λ_2) podzbiorem półpłaszczyzny $\{(x,y,z) : x > 0,\ y = 0\}$, mającym środek ciężkości $s(A)$,

i niech B będzie podzbiorem $\mathbb{R}^3$, uzyskanym z obrotu A o kąt α wokół prostej $x = y = 0$.

Wtedy $\lambda_3(B) = \alpha r \cdot \lambda_2(A)$, gdzie r jest odległością $s(A)$ od osi obrotu: $r = \dfrac{1}{\lambda_2(A)} \displaystyle\int_A x \, d\lambda_2(x,z)$

<u>Uwaga</u>: α oczywiście w radianach, nie w stopniach!

Dowód

Niech $\Omega = (0,\infty) \times \mathbb{R} \times (0,\alpha) \ni (x,z,t)$

$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,z,t) = (x\cos t, x\sin t, z)$

$$|J_\Phi| = |\det D\Phi| = \left|\det \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -x\sin t \\ \sin t & 0 & x\cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = |x\sin^2 t + x\cos^2 t| =$$

$$= |x| \underset{\text{bo } x>0}{=} x$$

i łatwo możemy sprawdzić, że dla $\alpha \in (0, 2\pi]$ Φ jest różnowartościowe, jest więc dyfeomorfizmem.

$$\Phi(A \times (0,\alpha)) = B \setminus \underbrace{\{(x,y,z) : x>0, y=0\}}_{\text{miary Lebesgue'a zero w } \mathbb{R}^3}$$

Stąd

$$\lambda_3(B) = \lambda_3(\Phi(A)) = \int_{A\times(0,\alpha)} |\det D\Phi|\, d\lambda_3 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\alpha \int_A x\, d\lambda_2\, \overset{d\lambda_1(t)}{\overset{|||}{dt}}$$

$$= \lambda_2(A) \int_0^\alpha \frac{1}{\lambda_2(A)} \int_A x\, d\lambda_2\, dt = \alpha r \cdot \lambda_2(A).$$

$\square$.

Przestrzenie Lebesgue'a

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną.
Dla dowolnej $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnej wzgl. $\mathcal{F}$
definiujemy $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$

Wiemy, że wielkość ta jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy f jest całkowalna wzgl. μ na X.

Bez trudu sprawdzamy, że $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, więc $\|\cdot\|_1$ spełnia 2 z 3 warunków na bycie normą na przestrzeni funkcji całkowalnych. Pozostaje warunek
$\|f\|_1 = 0 \overset{?}{\iff} f = 0$. Ten oczywiście nie jest spełniony,
$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ μ-p.w. na X. Aby obejść tę trudność, wprowadzamy na zbiorze wszystkich funkcji mierzalnych relację: $f \sim g \iff f = g$ μ-p.w.
To jest relacja równoważności, możemy więc każdej funkcji przypisać jej klasę abstrakcji: utożsamiamy dwie funkcje, jeżeli są równe μ-p.w.
Nie będziemy tego utożsamienia specjalnie podkreślać ani oznaczać klas abstrakcji, ale trzeba o tym pamiętać.

Def: Przestrzeń $L^1(X,\mu)$ to zbiór wszystkich klas abstrakcji powyższej relacji $\sim$, określonej na funkcjach $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ całkowalnych wzgl. μ

To jest przestrzeń liniowa ($[\alpha f + \beta g]_\sim = \alpha [f]_\sim + \beta [g]_\sim$), a funkcja $[f]_\sim \longmapsto \|f\|_1$ jest na niej normą.

W podobny sposób, rozważając tę samą relację na przestrzeni tych funkcji $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnych wzgl. $\mathcal{F}$, dla których skończona jest całka $\int_X |f|^p \, d\mu$ dla pewnego ustalonego $p \in [1,\infty)$

dostajemy przestrzeń $L^p(X,\mu)$ z normą

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Proszę sprawdzić, że dla $p \in [1,\infty)$ to rzeczywiście jest norma. A co się dzieje dla $p \in (0,1)$?

Na koniec zdefiniujemy przestrzeń $L^\infty(X,\mu)$.

Def: Supremum istotne funkcji f na X wzgl. miary μ to

$$\operatorname*{supess}_X f = \inf \left\{ \sup_{X \setminus Z} f : Z \subset X, \mu(Z) = 0 \right\}$$

$$= \inf \left\{ \sup_X g : g \in [f]_\sim \right\}$$

Definiujemy

$$L^\infty(X,\mu) = \{[f]_\sim : f \text{ mierzalna wzgl. } \mu,\ \sup_X \mathrm{ess}|f| < \infty\};$$

Łatwo znów sprawdzić (proszę to zrobić!) że L^∞ jest przestrzenią liniową, zaś

$$\|f\|_\infty = \sup_X \mathrm{ess}|f| \quad \text{jest na niej normą.}$$

Literka L bierze się od nazwiska Henri Lebesgue'a (1875 – 1941), a przestrzenie L^p, $p \in [1,\infty]$, nazywane są przestrzeniami Lebesgue'a.

Po feriach zbadamy staranniej ich własności.