Zbieżność w mierze

Niech μ będzie miarą zewnętrzną na X,
$\mathcal{F}$ – σ-ciało zbiorów μ-mierzalnych

Def: Ciąg (f_n) funkcji μ-mierzalnych (tzn. mierzalnych wzgl. $\mathcal{F}$), $f_n : X \to \mathbb{R}$, zbiega do $f : X \to \mathbb{R}$ w mierze, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Zbieżność tę oznaczamy $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Naturalne pytania: 1. jak się ma zbieżność w mierze do zbieżności μ-p.w.?
2. Czy granica f ciągu (f_n) w mierze jest funkcją μ-mierzalną, gdy f_n są μ-mierzalne?

Twierdzenie (Lebesgue) Jeżeli ciąg funkcji mierzalnych (f_n) zbiega do $f : X \to \mathbb{R}$ p.w. oraz $\mu(X) < \infty$, to $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Uwaga: Dla $X = \mathbb{R}$ weźmy $f_n = \chi_{[n,+\infty)}$, wtedy $f_n \to 0$ λ p.w., ale $\forall_n$ $\mu(\{|f_n - 0| > 0\}) = +\infty$, więc oczywiście $f_n \not\xrightarrow{\mu} f$. Stąd założenie $\mu(X) < \infty$ jest konieczne.

Dowód: To kolejna wariacja na temat Lematu Borela-Cantellego. Oznaczmy $E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, dla pewnego ustalonego $\varepsilon > 0$.

Oczywiście $\mu(E_n) \leq \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_n\right)$.

Zauważmy jednak, że $F_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_n$ tworzą zstępujący ciąg zbiorów, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, oraz $\mu(F_1) \leq \mu(X) < \infty$.

Stąd $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

Kiedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_n$? tylko wtedy, gdy

x należy do E_n dla ∞-wielu n,

a więc dla ∞-wielu n jest $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

To jednak wyklucza $f_n(x) \to f(x)$, więc może zachodzić tylko na zbiorze miary μ równej zero (bo $f_n \to f$ μ-p.w.). Stąd $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$,

więc
$$0 \leq \mu(E_n) \leq \mu(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ a zatem } f_n \xrightarrow{\mu} f. \quad \square$$

<u>Twierdzenie</u> (F. Riesz). Jeżeli $f_n \xrightarrow{\mu} f$, to istnieje podciąg (f_{n_i}) ciągu (f_n) zbieżny μ-p.w. do f.

(tu <u>nie potrzebujemy</u> założenia $\mu(X) < \infty$)

Wniosek: Jeżeli $f_n : X \to \mathbb{R}$ są μ-mierzalne i $f_n \xrightarrow{\mu} f$, to f też jest μ-mierzalna.

Dowód: f jest granicą (μ-p.w.) ciągu f_{n_i} funkcji mierzalnych.

Dowód tw. Riesza.

Wiemy, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$
$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{i}\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, więc
istnieje n_i t.że. $\mu\left(\{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{i}\}\right) < \frac{1}{2^i}$,
możemy też założyć (dlaczego?), że $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Niech $E_k = X \setminus \bigcup_{i=k}^{\infty} \{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{i}\}$,
wtedy $\mu(X \setminus E_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{i}\right) < \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} =$
$= 2^{-k+1}$, więc $\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.

Jeżeli zaś $x \in E_k$, to $\underset{i \geqslant k}{\forall} |f_{n_i}(x) - f(x)| < \frac{1}{i}$,
więc $f_{n_i} \rightrightarrows f$ na E_k $\Rightarrow$ $f_{n_i} \to f$ punktowo na $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$
$\Rightarrow f_{n_i} \to f$ μ-p.w. na X.

$\square$.

Twierdzenie o zamianie zmiennych

W tym twierdzeniu przestrzenią mierzalną jest $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, a $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem klasy C^1.

Twierdzenie: Niech Ω i Φ będą j.w., niech $f : \Phi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie a) funkcją całkowalną lub b) funkcją mierzalną nieujemną.

Wówczas funkcja $|\det D\Phi| \cdot (f \circ \Phi) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ jest a) całkowalna lub b) mierzalna i nieujemna i zachodzi równość

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n .$$

Oczywiście mierzalność i całkowalność rozumiemy względem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i λ_n.

Kluczową częścią dowodu jest lemat o rozkładzie dziedziny izomorfizmu. Mówi on, że Ω możemy przedstawić jako sumę zbiorów otwartych U_j, $j=1,2,\dots$ takich, że na każdym z U_j $D\Phi$ jest prawie stałe ($\Rightarrow \Phi$ jest lipszycowskie i prawie afiniczne). Wiemy, że gdy $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowe, to $\lambda_n(T(A)) = |\det T|\, \lambda_n(A)$; oczywiście tę samą własność mają przekształcenia afiniczne: gdy $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = Tx + v$, to $\lambda_n(F(A)) = |\det T|\, \lambda_n(A)$. Na koniec trzeba wszystko zebrać do kupy i przejść z „prawie" do zera, by dostać tezę.

Lemat o rozkładzie dziedziny dyfeomorfizmu.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$ dyfeomorfizm klasy C^1. Dla każdego $c > 1$ istnieje rodzina $\{U_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, zbiorów otwartych oraz $s_j \in GL(n, \mathbb{R})$ takie, że

(1) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$

(2) dla $x \in U_j$ mamy $|J_\Phi(x)| = |\det D\Phi(x)| \geq \frac{1}{c} |\det s_j|$

(3) jeżeli $A \subset U_j$ jest mierzalny, to $\Phi(A)$ też i $\lambda_n(A)\, |\det s_j| \geq \frac{1}{c} \lambda_n(\Phi(A))$

Dowód

Niech $S \subset GL(n,\mathbb{R})$ będzie ustalonym, gęstym, przeliczalnym podzbiorem, $S = \{s_1, s_2, \dots\}$.

Ustalmy teraz $s \in S$ i $m \in \mathbb{N}$. W definicji poniżej pojawia się jeszcze ε, ale wartość ε ustalimy później, na razie wiemy tylko, że $\varepsilon > 0$ i że ε zależy tylko od c, a więc jest ustalone.

Zdefiniujmy teraz

$$Z(s,m) = \Big\{ x \in \Omega :$$

- $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{m}$
- $\|x\| < m$
- $D\Phi(x)$ jest bliskie s:

$$|||D\Phi(x)\cdot s^{-1} - \mathrm{Id}||| + |||s \circ D\Phi(x)^{-1} - \mathrm{Id}||| < \varepsilon$$

- $$\frac{\|\Phi(x+v) - \Phi(x) - D\Phi(x)v\|}{\|v\|} < \varepsilon \quad \text{dla } 0 \neq \|v\| < \frac{1}{m} \Big\}$$

Nietrudno sprawdzić, że $Z(s,m)$ jest zbiorem otwartym, $\overline{Z(s,m)} \subset \Omega$ i $\overline{Z(s,m)}$ jest zwarty.

Dalej, $\bigcup_{\substack{s\in S\\ m\in\mathbb{N}}} Z(s,m) = \Omega$, bo dla każdego $x \in \Omega$ znajdziemy s i m spełniające powyższe warunki.

$$\{Z(s,m) : s \in S, m \in \mathbb{N}\} = \{U_j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że dla $x \in Z(s,m)$

$$|||D\Phi(x)\circ s^{-1}||| \leq |||D\Phi(x)\circ s^{-1} - Id||| + |||Id||| < 1+\varepsilon$$

$\Rightarrow$ żadna z wartości własnych $D\Phi(x)\circ s^{-1}$ nie jest, co do modułu, $> 1+\varepsilon$ $\Rightarrow \left|\det(D\Phi(x)\circ s^{-1})\right| = \left|\frac{\det D\Phi(x)}{\det s}\right| \leq (1+\varepsilon)^n$

Tak samo pokazujemy, że $\left|\frac{\det S}{\det D\Phi(x)}\right| \leq (1+\varepsilon)^n$,

co dowodzi (2), o ile tylko weźmiemy $\varepsilon > 0$ takie, że $(1+\varepsilon)^n < c$.

Dalej, oznaczmy $R(v) = \Phi(x+v) - \Phi(x) - D\Phi(x)v$; wiemy, że gdy $\|v\| < \frac{1}{m}$, to $\|R(v)\| < \varepsilon\|v\|$.

Oszacujmy

$$\|\Phi\circ s^{-1}(u) - \Phi\circ s^{-1}(w)\| = \|D\Phi(s^{-1}(u))\circ s^{-1}(u-w) + R(s^{-1}(u-w))\|$$

$$= \|(D\Phi(s^{-1}(u))\circ s^{-1} - Id)(u-w) + u-w + R(s^{-1}(u-w))\|$$

i jeżeli $u, w \in s(Z(s,m))$, $\|s^{-1}(u-w)\| < \frac{1}{m}$, to

$$\leq (\varepsilon+1)\|u-w\|.$$

Niech teraz $A \subset Z(s,m)$ będzie mierzalny. Podzielmy go na rozłączne zbiory A_i mierzalne, $i = 1,2,\dots,N$, takie, że $\operatorname{diam} A_i < \frac{1}{m}$; $\lambda_n(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(A_i)$

Wtedy $\Phi\circ s^{-1}$ jest lipszycowska na $s(A_i)$, ze stałą $(1+2\varepsilon)$.

Oznacza to w szczególności, że Φ jest lipszycowska na A_i (jako złożenie lipszycowskich $\Phi\circ s^{-1}$ i s), więc $\Phi(A_i)$ jest mierzalny $\Rightarrow \Phi(A)$ też.

Mamy dalej

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(\Phi(A_i)) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_n((\Phi\circ s^{-1})(s(A_i)))$$
$$\leq (1+2\varepsilon)^n \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(s(A_i)) =$$
$$= (1+2\varepsilon)^n |\det s| \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(A_i) =$$
$$= (1+2\varepsilon)^n |\det s| \cdot \lambda_n(A),$$

co dowodzi (3), o ile weźmiemy ε t.ż. $(1+2\varepsilon)^n < c$.

$\square$.

Dowód twierdzenia

Załóżmy, że f jest mierzalna, nieujemna. Ustalmy zbiór mierzalny $E \subset \Omega$ i $c > 1$ i niech $\{U_j, s_j\}$ będą jak w Lemacie. Rodzinę $\{U_j\}$ możemy urozłącznić, biorąc

$$A_1 = U_1,\ A_2 = U_2 \setminus A_1, \ldots, A_k = U_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i,$$

wtedy A_i są borelowskie i parami rozłączne i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i) \qquad \Phi(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(E \cap A_i)$$

Stąd wynika już, że $\Phi(E)$ jest mierzalny.

Mamy (dla każdego $c > 1$)

$$\int_E |\det D\Phi| \, d\lambda_n = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E \cap A_i} |\det D\Phi| \, d\lambda_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{\infty} |\det s_i| \cdot \lambda_n(E \cap A_i) \geq \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(\Phi(E \cap A_i))$$

$$= \frac{1}{c^2} \lambda_n(\Phi(E)), \text{ więc}$$

$$\int_E |\det D\Phi| \, d\lambda_n \geq \lambda_n(\Phi(E)) = \int_{\Phi(\Omega)} \chi_{\Phi(E)} \, d\lambda_n$$

$$\int_E |\det D\Phi| \, d\lambda_n = \int_{\Omega} \chi_{\Phi(E)} |\det D\Phi| \, d\lambda_n$$

Stąd dostajemy, że nierówność

$$\int_{\Omega} f \, |\det D\Phi| \, d\lambda_n \geq \int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda_n$$

zachodzi dla każdej funkcji f prostej na $\Phi(\Omega)$

$\Longrightarrow$ dla każdej f mierzalnej na $\Phi(\Omega)$.
tw. Lebesgue'a o zbieżn. monot.

Stosując to samo rozumowanie do $V = \Phi(\Omega)$ w miejsce Ω, Φ^{-1} w miejsce Φ i $g = f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|$ dostajemy przeciwną nierówność.

$\blacksquare$