Twierdzenie: Jeżeli $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to $g \circ f$ też jest mierzalna.

Dowód:

$$(g \circ f)^{-1}((a,+\infty]) = f^{-1}(g^{-1}((a,+\infty])) \underset{\uparrow}{=} f^{-1}(g^{-1}((a,+\infty)))$$

bo $+\infty \notin g(\mathbb{R})$

$g^{-1}((a,+\infty))$ jest zbiorem otwartym, a więc borelowskim, zatem $f^{-1}(g^{-1}((a,+\infty))) \in \mathcal{F}$. $\square$

Uwaga: W ogólnej teorii miary rozważamy przekształcenia między dwiema przestrzeniami mierzalnymi. Jeżeli $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ są przestrzeniami mierzalnymi, to przekształcenie $f: X \to Y$ nazywamy mierzalnym, gdy $\forall_{A \in \mathcal{G}} \; f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.
Rozważane przez nas funkcje mierzalne $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ to funkcje mierzalne jako przekształcenia między $(X, \mathcal{F}, \mu)$ a $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \nu)$, gdzie $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ jest najmniejszym σ-ciałem w $\overline{\mathbb{R}}$ zawierającym wszystkie półproste $\{(a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\}$. Oczywiście $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, ale $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ~~jest~~ nie zawiera $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

W szczególności $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna w s. Lebesgue'a (wzgl. σ-ciała $\mathcal{L}(\mathbb{R})$), jeżeli jest mierzalna jako przekształcenie

$$(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \nu)$$

miary μ i ν nie odgrywają w def. żadnej roli.

Nawet gdy f nie przyjmuje wartości $\pm\infty$, mamy asymetrię σ-ciał – i stąd jest problem: złożenie 2 funkcji mierzalnych nie musi być mierzalne. Nawet złożenie funkcji ciągłej z mierzalną w odwrotnej kolejności niż w Twierdzeniu nie musi być mierzalne, jak pokazuje poniższy przykład.

<u>Uwaga</u>: jeżeli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to oczywiście jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, bo $f^{-1}((a, +\infty]) = f^{-1}((a, +\infty))$ jest otwarty $\Rightarrow$ mierzalny w s. L.

<u>Przykład – przypomnienie</u>:

Jeżeli g: $[0,1] \to [0,1]$ jest funkcją Cantora, $G(x) = g(x) + x$, a $G: [0,1] \to [0,2]$ jest ściśle rosnąca. Jeżeli przez $C \subset [0,1]$ oznaczymy zbiór Cantora, to ~~znajdziemy~~ $\lambda_1(G(C)) = 1$, więc w $G(C)$ znajdziemy zbiór niemierzalny $V \subset G(C)$.

Niech $M = G^{-1}(V) \subset C \subset [0,1]$ i niech

$h = \chi_M$; $h(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$.

Wtedy $h^{-1}((a,+\infty]) = \begin{cases} \emptyset & a \geq 1 \\ M & a \in [0,1) \\ \mathbb{R} & a < 0 \end{cases}$

Wszystkie 3 możliwe wyniki są zbiorami mierzalnymi (M jest mierzalny, bo jako podzbiór C jest miary 0), więc h jest mierzalna. Funkcja $F = G^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ jest ciągła, więc mierzalna (możemy ją też łatwo rozszerzyć do funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, kładąc $F(t) = 0$ dla $t < 0$, $F(t) = 1$ dla $t > 2$).

Mamy jednak

$$\cancel{(F \circ h)^{-1}}$$

$$(h \circ F)^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right]\right) = F^{-1}\left(h^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right]\right)\right) =$$

$$= F^{-1}(M) = G(M) = V \leftarrow \text{i to jest zbiór niemierzalny.}$$

Stąd $\underset{\substack{\nearrow \\ \text{mierzalna} \\ \text{w s.L.}}}{h} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ciągła}}}{F}$ nie jest mierzalna w s.L.

<u>Stwierdzenie</u>: Jeżeli $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$, to $|f|$ i f^2 też są mierzalne wzgl. $\mathcal{F}$.

<u>Dowód</u>: Gdyby f nie przyjmowała wartości $\pm\infty$, wszystko wynikałoby z twierdzenia o składaniu funkcji mierzalnej z ciągłą. Możemy jednak łatwo powtórzyć dowód; zrobię to dla $|f|$, dla f^2 wszystko przebiega tak samo:

Niech $g(t) = |t|$, $g: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas, dla $a \in \mathbb{R}$,

$$g^{-1}((a,+\infty]) = [-\infty,-a) \cup (a,+\infty] = \begin{cases} [-\infty,-a) \cup (a,+\infty] & \text{suma rozłączna gdy } a \geq 0 \\ \overline{\mathbb{R}} & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

Łatwo można sprawdzić, że i jedna, i druga możliwość leży w $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, więc

$$f^{-1}(g^{-1}((a,+\infty])) \in \mathcal{F}.$$

$$\overset{\parallel}{(g\circ f)^{-1}((a,+\infty])} = |f|^{-1}((a,+\infty]).$$

Równoważnie, $|f|^{-1}((a,+\infty]) = \{x\in X: f(x)>a\} \cancel{\cup\{x\in X: f(x)<a\}}$

$\cup \{x \in X: f(x) < -a\}$

i oba zbiory należą do $\mathcal{F}$, więc suma też.

<u>Stwierdzenie</u>: Jeżeli $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, to funkcje

(1) λf (2) $f+g$ (3) $f-g$ (4) fg .

Umowa: $0(\pm\infty) = 0$

są mierzalne, o ile tylko operacje te są dobrze określone w $\overline{\mathbb{R}}$. Podobnie, (5) jeżeli $g \neq 0$ w X, mierzalna jest funkcja f/g.

<u>Dowód</u>: (1) jeżeli $\lambda = 0$, to $\lambda f \equiv 0$ jest mierzalna; gdy $\lambda \neq 0$, to $\forall_{a \in \mathbb{R}}$ $\{x \in X : \lambda f(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > \frac{a}{\lambda}\}$ gdy $\lambda > 0$

lub $= \{x \in X : f(x) < \frac{a}{\lambda}\}$ gdy $\lambda < 0$

jeśli f jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$, to oba zbiory należą do $\mathcal{F}$.

(2) bez trudu, wprost z definicji sprawdzamy, że gdy $a \in \mathbb{R}$, to funkcja $-g(x) + a$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$.

Wtedy $\{x \in X : f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X : f(x) > -g(x) + a\} \in \mathcal{F}$.

(3) tak samo jak (2)

(4) Mamy $f(x)g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x))^2 - \frac{1}{2}(f(x)-g(x))^2$;

z poprzedniego stwierdzenia i punktów (1)-(3) dostajemy mierzalność fg

(5) $\{x \in X : \frac{f(x)}{g(x)} > a\} = \Big(\{x \in X : f(x) > a g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) > 0\}\Big)$
$\cup \Big(\{x \in X : f(x) < a g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) < 0\}\Big)$

wszystkie zbiory po prawej stronie równości są mierzalne (tzn. należą do $\mathcal{F}$), więc ten po lewej też.

□.

Stwierdzenie: Niech $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych, $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy $x \longmapsto \inf_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$ oraz $x \longmapsto \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$ są mierzalne.

Dowód

$$\{x\in X : \inf_i f_i(x) < a\} = \{x\in X : \exists_i\ f_i(x) < a\} =$$
$$= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_i(x) < a\} \in \mathcal{F}.$$

Analogicznie

$$\{x\in X : \sup_i f_i(x) > a\} = \{x\in X : \exists_i\ f_i(x) > a\} =$$
$$= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_i(x) > a\} \in \mathcal{F} \quad \square.$$

Wnioski:

(1) jeżeli f, g mierzalne, to $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ też.

(2) $x \longmapsto \liminf_{i\to\infty} f_i(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \inf_{n>i} f_n(x)$ oraz

$x \longmapsto \limsup_{i\to\infty} f_i(x) = \inf_{i\in\mathbb{N}} \sup_{n>i} f_n(x)$

są mierzalne

(3) jeżeli (f_i) jest ciągiem funkcji mierzalnych, zbieżnym punktowo do pewnego f, to f też jest mierzalna (bo wtedy $f = \liminf f_i$).

Def: Mówimy, że dwie funkcje $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ są równe μ-prawie wszędzie, jeżeli $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Piszemy wówczas $f = g$ μ-p.w. (prawie wszędzie)

lub μ-a.e. (almost everywhere)

Probabiliści używają skrótu pnp (prawie na pewno)

lub a.s. (almost surely).

Ogólniej: Pewna własność zachodzi μ-prawie wszędzie w X, gdy $\mu(\{x \in X : \text{własność nie zachodzi w punkcie } x\}) = 0$.

Gdy mówimy o funkcjach rzeczywistych i μ jest miarą Lebesgue'a, najczęściej pomijamy μ, pisząc $f = g$ p.w. itp.

~~Stwierdzenie: Jeżeli $f = g$ p.w. na X oraz f jest mierzalna na X (tzn. $f \in \mathcal{F}$~~

Niech teraz $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie taka, że $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów mierzalnych wzgl. μ (więc $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ tak, ale $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ nie)

Mamy wówczas

Stwierdzenie: Jeżeli $f = g$ p.w. na X i f jest mierzalna na X, to g też jest mierzalna na X.

Dowód: Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiory $f^{-1}((a, +\infty])$ i $g^{-1}((a, +\infty])$ różnią się o podzbiór zbioru $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, a więc o zbiór miary zero.

Stąd jeżeli jeden z nich jest mierzalny (tzn $\in \mathcal{F}$), to drugi też.

Bardzo ważną klasą funkcji mierzalnych są funkcje proste.

<u>Def</u>: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy <u>funkcją prostą</u>, gdy jest mierzalna i jej zbiór wartości jest skończony.

<u>Twierdzenie</u>: f jest prosta $\Leftrightarrow$ istnieje rodzina parami rozłącznych mierzalnych A_i, $i = 1, 2, \dots, k$ oraz stałe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{R}}$ takie, że $\forall_{x \in X}\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$.

<u>Dowód</u> ($\Leftarrow$) oczywiście funkcja postaci $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$ jest mierzalna (gdy A_i są mierzalne, co założyliśmy), a jej zbiór wartości jest skończony i równy $\{0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$.

($\Rightarrow$) Niech ~~A~~ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ będzie zbiorem wartości funkcji f. Oznaczmy $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$.

Oczywiście A_j są mierzalne (bo f jest mierzalna, $\{\alpha_j\}$ są borelowskie), parami rozłączne i $\forall_{x \in X}\ f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$

<u>Zadanko/Uwaga</u>: Jeżeli $A_1, \dots, A_k$ są mierzalne (ale niekoniecznie parami rozłączne), to $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ i tak jest funkcją prostą.

Wniosek: Skończone kombinacje liniowe funkcji prostych, o ile tylko mają sens w $\overline{\mathbb{R}}$, są funkcjami prostymi.

Uwaga: Jeżeli $h: X \to \mathbb{R}$ (nie $\overline{\mathbb{R}}$!) jest prosta i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $g \circ h$ też jest prosta, a $h \circ g$ niekoniecznie (choć wciąż ma skończenie wiele wartości).

Twierdzenie: Niech $f: X \to [0, \infty]$ będzie nieujemną funkcją mierzalną. Wtedy istnieją zbiory mierzalne $A_1, A_2, \ldots \subset X$ takie, że $f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$

Dowód: Niech $A_1 = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$

$$A_2 = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \chi_{A_1}(x)\}$$

$\vdots$

$$A_k = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x)\}$$

to są oczywiście zbiory mierzalne.

Na początek wykażemy, że $\forall_{x \in X} \ f(x) \overset{(*)}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x)$.

(*) oczywiście zachodzi, gdy x nie należy do żadnego A_i oraz gdy $f(x) = +\infty$.

~~Dla (*)~~ Zauważmy, że gdy x nie należy do żadnego A_i, to (indukcyjnie) $f(x) < \frac{1}{i}$ dla wszystkich i, więc $f(x) = 0$ i w (*) mamy równość.

Jeżeli natomiast $f(x) = +\infty$, to $x \in A_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, wtedy prawa strona (*) to $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$ i w (*) znów mamy równość.

Dla każdego $x \in A_k$ mamy
$$f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x).$$

- albo $x \in A_k$ dla nieskończenie wielu k, wtedy powyższa nierówność zachodzi dla ∞-wielu k, skąd już wynika (*),
- albo $x \in A_{k_0}$ i $\forall_{l > k_0} x \notin A_l$, ale wtedy
$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{k_0} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x), \text{ bo } \chi_{A_i}(x) = 0 \text{ dla } i > k_0.$$

Jeżeli teraz $f(x) < \infty$, to istnieje nieskończenie wiele k tż $x \notin A_k$. W przeciwnym bowiem razie znaleźlibyśmy k_0 tż $\forall_{l > k_0} x \in A_l$, ale wtedy
$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) \geq \sum_{l > k_0} \frac{1}{l} = +\infty.$$

~~Xi~~ Jeżeli więc k jest takie, że $x \notin A_k$, to

$$\frac{1}{k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } x \notin A_k}}{>} f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) \geq f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) \geq 0,$$

i wiemy, że takich k jest ∞-wiele $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) .$$

$\square$.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i nieujemna, to istnieje ciąg funkcji prostych $f_i : X \to \mathbb{R}$, niemalejący i zbieżny punktowo do f.

Wróćmy do dowodu twierdzenia.

Załóżmy, że f jest ograniczona, $f: X \to [0, M]$.

Wtedy $\forall_{l \in \mathbb{N}}$, l dostatecznie dużego,

~~w ciągu~~ wśród $k \in \left[\frac{l}{e^{M+100}}, l\right] \cap \mathbb{N}$ znajdziemy

takie k_0, że $x \notin A_{k_0}$. W przeciwnym razie

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \geq \sum_{\frac{l}{e^{M+100}} \leq k \leq l} \frac{1}{k} \simeq \ln l - \ln \frac{l}{e^{M+100}} \simeq M+100 \gg M \ \lightning.$$

Stąd

$$\begin{array}{ccc} & & f(x) - \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \geq 0 \\ & & \wedge\!| \\ \frac{e^{M+100}}{l} \geq \frac{1}{k_0} & \underset{\text{bo } x \notin A_k}{\geq} & f(x) - \sum_{k=1}^{k_0 - 1} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \end{array}$$

To dowodzi, że gdy f jest ograniczona,

zbieżność $f_l = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$ do f jest

<u>jednostajna</u>.

Wniosek: Jeżeli $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, ~~na~~ to istnieje ciąg funkcji prostych (f_n) zbieżny punktowo do f; jeżeli f jest ograniczona, to zbieżność ta może być jednostajna.

Dowód: Rozkładamy f na część dodatnią i ujemną, $f = f_+ - f_-$, gdzie

$$f_+ = \max(f, 0)$$
$$f_- = -\min(f, 0)$$

i stosujemy twierdzenia oddzielnie do każdej z nich.

Zadanie: Sprawdzić, że wtedy $|f_n| \leq |f_{n+1}|$, $|f_n| \nearrow |f|$.

Obserwacja: ~~Dla~~ Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie p-nią mierzalną taką, że X jest $T_{3,5}$, $\mathcal{F}$ jest ~~radni~~ σ-ciałem zbiorów mierzalnych wzgl. μ i μ jest ~~borelowsko regularna~~ Radona. Wtedy dla każdej funkcji prostej $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ i $\forall_{\varepsilon}$ istnieje funkcja ciągła $h : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\mu(\{x \in X : f(x) \neq h(x)\}) < \varepsilon$

Dowód: Wystarczy to sprawdzić dla $f = \chi_A$, gdzie $A \subset X$ jest mierzalny.

Niech $F \subset A \subset \mathcal{U}$, F domknięty, $\mathcal{U}$ otwarty, $\mu(A \setminus F) < \varepsilon/2$, $\mu(\mathcal{U} \setminus A) < \varepsilon/2$. i niech h będzie funkcją Urysohna dla pary rozłącznych zbiorów domkniętych F, $X \setminus \mathcal{U}$. Wtedy $h : X \to [0,1]$, $h \equiv 1$ na F, $h \equiv 0$ poza $\mathcal{U}$, więc

$$\{h(x) \neq f(x)\} \subset \mathcal{U} \setminus F = \mathcal{U} \setminus A \cup A \setminus F$$

i $\mu(\{h(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. $\square$

Wniosek Przy powyższych zał. Dla każdej funkcji ~~ciągłej~~ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalnej istnieje ciąg funkcji ciągłych f_n zbieżny do f p.w.

~~Dowód: Znajdujemy ciąg funkcji prostych $g_i \xrightarrow{\text{punktowo}} f$ i $h_i \in C(X, \mathbb{R})$ t.ż. $\mu(\{h_i \neq g_i\}) < \frac{1}{i}$.~~

Twierdzenie: Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną taką, że X jest $T_{3,5}$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów mierzalnych względem miary μ, a μ jest miarą Radona i jest σ-skończona, tzn. X jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów o mierze skończonej. Wtedy dla każdej funkcji prostej $f: X \to \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $h: X \to \mathbb{R}$ taka, że $\mu(\{x \in X : f(x) \neq h(x)\}) < \varepsilon$.

Dowód:

Tezę twierdzenia wystarczy sprawdzić w przypadku $f = \chi_A$, gdzie $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) < \infty$ } Zadanko: dlaczego?

Dla takiego A znajdziemy $F \subset A \subset \mathcal{U}$, F zwarty, $\mathcal{U}$ otwarty, $\mu(A \setminus F) < \varepsilon/2$, $\mu(\mathcal{U} \setminus A) < \varepsilon/2$.

Niech $h: X \to [0,1]$ będzie funkcją Urysohna dla pary rozłącznych zbiorów domkniętych F i $X \setminus \mathcal{U}$, tzn. $h \equiv 1$ na F, $h \equiv 0$ na $X \setminus \mathcal{U}$.

Wtedy $\{x \in X : h(x) \neq f(x)\} \subset \mathcal{U} \setminus F = \mathcal{U} \setminus A \cup A \setminus F$,

więc $\mu(\{h \neq f\}) \leq \mu(\mathcal{U} \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

$\square$

Wniosek: Przy powyższych założeniach dla każdej mierzalnej $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, istnieje ciąg (f_n) funkcji ciągłych, $f_n: X \to \mathbb{R}$, zbieżny do f μ-prawie wszędzie.

Dowód:

Znajdujemy ciąg funkcji prostych (g_n), $g_n : X \to \mathbb{R}$, zbieżny μ-p.w. do f, a następnie do każdej z g_n dobieramy $h_n \in C(X, \mathbb{R})$ t.ż. $\mu(\{g_n \neq h_n\}) < \frac{1}{2^n}$

Wtedy $h_n \to f$ μ-p.w. (prościutkie zadanko)

Gdy $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i $\mu = \lambda_n$, możemy wprowadzić pewną szczególną klasę funkcji prostych.

Def: Funkcję prostą $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy funkcją schodkową, gdy $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{P_i}$, gdzie $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}$, a $\{P_i\}$ to ~~par~~ rodzina parami rozłącznych przedziałów.

Lemat (I zasada Littlewooda)

Każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a, o mierze skończonej, jest prawie skończoną sumą rozłącznych przedziałów.

A precyzyjniej: jeżeli $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n(E) < \infty$, to $\forall_{\varepsilon > 0}$ $\exists_{R_1, \dots, R_N}$ parami rozłączne przedziały t.ż. $\lambda_n(E \triangle \bigcup_{i=1}^{N} R_i) < \varepsilon$.

różnica symetryczna.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$

Niech $\mathcal{U} \supset E$ będzie otwarty i taki, że $\lambda_n(\mathcal{U} \setminus E) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Zbiór $\mathcal{U}$ jest sumą przeliczalnej rodziny kostek diadycznych, $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, tż. $\lambda_n(\mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i)$; lewa strona tej równości jest skończona, więc szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(Q_i)$ jest zbieżny. Istnieje więc N tż

$\sum_{i>N} \lambda_n(Q_i) < \varepsilon/3$. Na koniec zastąpmy każdą z kostek Q_i kostką R_i, koncentryczną z Q_i, $R_i \subset Q_i$, ale troszeczkę mniejszą, taką, że $\lambda_n(Q_i \setminus R_i) < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^i}$.
Wtedy

$$\lambda_n\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^{N} R_i\right) \le \lambda_n(\mathcal{U} \setminus E) + \sum_{i>N} \lambda_n(Q_i) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_n(Q_i \setminus R_i) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$.

Wniosek: Dla każdej funkcji prostej $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa $g: X \to \mathbb{R}$ tż $\lambda_n(\{f \neq g\}) < \varepsilon$.

Dowód: Wystarczy dla $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{E_i}$ przybliżyć E_i dost. dobrze sumami przedziałów, szczegóły zostawiam czytelnikom.

Wniosek: Dla każdej funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ istnieje ciąg funkcji schodkowych $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zbieżny do f prawie wszędzie.

II zasada Littlewooda

Każdy ciąg funkcji mierzalnych zbieżny punktowo jest prawie zbieżny jednostajnie.

Precyzyjniej:

Tw. Jegorowa: Niech μ będzie miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}^n$ i niech (f_k) będzie ciągiem funkcji mierzalnych względem σ-ciała $\mathcal{F}_\mu$ zbiorów mierzalnych wzgl. μ; $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Niech dalej $A \in \mathcal{F}_\mu$, $\mu(A) < \infty$ i załóżmy, że $f_k \longrightarrow f$ punktowo na A. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $B \subset A$ mierzalny (wzgl. $\mathcal{F}_\mu$) taki, że $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ i $f_k \rightrightarrows f$ na B.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Oznaczmy $A_j^i = \{x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \text{ dla } k > j\}$

Oczywiście $A_{j+1}^i \supset A_j^i$, a skoro $f_k \to f$ punktowo na A,

to $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^i = A$. Stąd $\mu(A) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j^i)$ dla $i = 1, 2, \ldots$,

a zatem $\forall_{i \in \mathbb{N}} \exists_{k_i} \quad \mu(A \setminus A_{k_i}^i) = \mu(A) - \mu(A_{k_i}^i) < 2^{-i}$

Niech teraz $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $2^{1-N} = \sum_{i \geq N} 2^{-i} < \varepsilon$.

Niech $B = \bigcap_{i \geq N} A_{k_i}^i$, wtedy $A \setminus B = \bigcup_{i \geq N} A \setminus A_{k_i}^i$

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{i \geq N} \mu(A \setminus A_{k_i}^i) < \sum_{i \geq N} 2^{-i} < \varepsilon.$$

Jeżeli teraz $x \in B$, to $\forall_{i \geq N}$ $x \in A^i_{k_i}$, więc

$$\forall_i \forall_{j > k_i} \quad |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \ ;$$

innymi słowy

$\forall_{x \in B}$ jeżeli $j > k_i$, to $|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{i}$

a to znaczy, że $f_j \rightrightarrows f$ na B. $\square$

<u>Uwaga</u>: Bez trudu możemy wzmocnić tw. Jegorowa, biorąc $f_k \longrightarrow f$ μ - p.w. zamiast wszędzie (wtedy szukamy $B \subset A \setminus Z$, gdzie $\mu(Z) = 0$, $f_k \longrightarrow f$ punktowo na $A \setminus Z$).

Jeżeli zaś miara zewn. μ. jest miarą borelowską, to możemy do tezy dopisać, że zbiór B jest domknięty (bo możemy B przybliżać wzgl. miary od środka zbiorami domkniętymi), a jeżeli jest miarą Radona, to że B jest zwarty.

III zasada Littlewooda

Każda funkcja mierzalna jest prawie ciągła.

czyli

<u>Tw. Łuzina</u>: Niech μ będzie miarą <u>borelowsko regularną</u> [zewnętrzną] na $\mathbb{R}^n$ i niech $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie mierzalna wzgl. σ-ciała zbiorów μ-mierzalnych. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie μ-mierzalny, $\mu(A) < \infty$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $K \subset A$ zwarty taki, że $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ i $f|_K$ jest ciągła.

<u>Dowód</u>: Przy naszych założeniach $\nu = \mu|_A$ jest miarą Radona na $\mathbb{R}^n$ (więc też na A z topologią podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$). Rozważmy przestrzeń mierzalną $(X = A, \mathcal{F} = \{A \cap B : B \in \mathcal{F}_\mu\}, \nu)$. Funkcja $f|_A$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$, więc istnieje ciąg $(\tilde{h}_k)$ funkcji ciągłych na A, $\tilde{h}_k : A \to \mathbb{R}$, tż. $\tilde{h}_k \to f|_A$ ν-p.w. Rozszerzając $\tilde{h}_k$ do $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h_k(x) = \begin{cases} \tilde{h}_k(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

dostajemy ciąg funkcji mierzalnych, zbieżny punktowo ν-p.w. na A do f. Z tw. Jegorowa istnieje $K \subset A$ zwarty taki, że $\nu(A \setminus K) = \mu(A \setminus K) < \varepsilon$ i $h_k \rightrightarrows f$ na K. Ale funkcje $h_k|_A$ są ciągłe na A, a więc i na K, ciąg funkcji ciągłych, zbieżny jednostajnie, ma granicę ciągłą.

$\square$.

Całkowanie

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną.

<u>Def</u>: Przeliczalna rodzina $\{E_1, E_2, \dots\}$ jest <u>rozbiciem</u> zbioru $E \in \mathcal{F}$, gdy

może być skończona

- $\forall_i \; E_i \in \mathcal{F}$
- zbiory E_i są parami rozłączne
- $E = \bigcup_i E_i$

<u>Definicja całki względem miary μ</u>:

Niech $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie nieujemna na $E \in \mathcal{F}$ i mierzalna względem $\mathcal{F}$. Definiujemy

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \overset{\text{ozn}}{=} \int_E f\, d\mu := \sup\left\{ \underline{\sum_{i=1}^{\infty} \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i)} : \{E_i\} \text{ jest rozbiciem } E \right\}$$

tu, jak i gdzie indziej w teorii miary, stosujemy umowę:
$0 \cdot \infty = 0$ (czyli $0 \cdot \text{cokolwiek} = 0$)

Twierdzenie (własności całki z funkcji nieujemnej)

① jeżeli $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne wzgl. $\mathcal{F}$ i $0 \le f \le g$ na $\underset{\mathcal{F}}{\overset{}{E}}$ ($E \in \mathcal{F}$), to $\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$ — monotoniczność

② jeżeli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$ i nieujemna na $E \in \mathcal{F}$, to

$$\mu(E) \cdot \inf_E f \le \int_E f\,d\mu \le \mu(E) \cdot \sup_E f$$

własność wartości średniej

③ jeżeli $f = c = \text{const}$ na $E \in \mathcal{F}$, to $\int_E f\,d\mu = c \cdot \mu(E)$.

④ jeżeli $E \in \mathcal{F}$, $\mu(E) = 0$, to dla każdej nieujemnej, mierzalnej wzgl. $\mathcal{F}$ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mamy $\int_E f\,d\mu = 0$.

⑤ jeżeli $E \in \mathcal{F}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$ i nieujemna na E, to dla każdego $\alpha \ge 0$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_E \alpha f\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu$$

⑥ jeżeli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$, $E \in \mathcal{F}$ oraz $\mu(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) > 0$, to $\int_E f\,d\mu = +\infty$.

Dowód ① wprost z definicji,

② Dla dowolnego rozbicia $\{E_i\}$ zbioru E mamy

$$\inf_E f \cdot \mu(E) = \inf_E f \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \inf_E f \cdot \mu(E_i) \le \sum_i \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i)$$

$$\le \sum_i \sup_{E_i} f \cdot \mu(E_i) \le \sup_E f \cdot \mu(E)$$

czyli
$$\inf_E f \cdot \mu(E) \le \sum_i \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i) \le \sup_E f \cdot \mu(E)$$

Biorąc supremum po wszystkich podziałach dostajemy tezę.

③ od razu z ② ; ④ od razu z ②

⑤ wprost z definicji, modulo przypadki $0 \cdot \infty$, które też są trywialne

⑥ możemy wziąć $E_1 = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ jako element rozbicia, wtedy wkład $\inf_{E_1} f \cdot \mu(E_1)$ od tego elementu do „sumy całkowej" $\sum_i \inf_{E_i} f \cdot \mu(E_i)$ będzie $+\infty$. □

Do dalszego badania całki przyda nam się następujące twierdzenie

<u>Twierdzenie</u>: Niech $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna i nieujemna. Wówczas $\nu : \mathcal{F} \to [0, 1]$, $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ jest miarą na $\mathcal{F}$.

<u>Dowód</u>: Jest oczywiste, że $\forall_{A \in \mathcal{F}}\ \nu(A) \ge 0$ oraz że $\nu(\emptyset) = 0$. Pozostaje sprawdzić przeliczalną addytywność ν:

jeżeli $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\forall_i\ A_i \in \mathcal{F}$ i A_i są parami rozłączne

to
$$\underbrace{\nu(A)}_{\int_A f \, d\mu} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)}_{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu}.$$

Niech $\{E_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ będzie, dla $i=1,2,\dots$, rozbiciem zbioru A_i. Wtedy $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ jest rozbiciem zbioru A,

więc

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \inf_{E_{ij}} f\cdot\mu(E_{ij})\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \inf_{E_{ij}} f\cdot\mu(E_{ij}) \leq \int_A f\,d\mu .$$

Biorąc supremum obu stron po wszystkich rozbiciach $\{E_{ij}\}$ zbiorów $A_1,\dots,A_N$, dostajemy

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{i=1}^{N}\int_{A_i} f\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu \quad , \text{ skąd}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu$$

Chcemy teraz wykazać nierówność w przeciwną stronę.

Niech $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ będzie rozbiciem zbioru A.
Wtedy dla każdego $i\in\mathbb{N}$ zbiory $F_{ij}=A_i\cap F_j$ tworzą rozbicie zbioru A_i oraz

$$\mu(A_i)=\sum_j \mu(F_{ij})$$

$$\mu(F_j)=\mu\left(\bigcup_i A_i\cap F_j\right)=\sum_i \mu(F_{ij})$$

Stąd $$\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{F_j} f\cdot\mu(F_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{F_j} f\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_{ij})=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\inf_{F_j} f\cdot\mu(F_{ij}) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{F_j} f\cdot\mu(F_{ij}) \leq$$

można, bo to szeregi o wyrazach nieujemnych

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{F_{ij}} f \cdot \mu(F_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu .$$

Biorąc supremum po wszystkich rozbiciach $\{F_j\}$ zbioru A

dostajemy $\int_A f d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$,

co kończy dowód twierdzenia. □.

Wnioski:

① Jeżeli $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i f jest mierzalna wzgl. $\mathcal{F}$ i nieujemna na $E_1 \cup E_2$, to

$$\int_{E_1 \cup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$$

$\Rightarrow$ ② jeżeli $f = \chi_A$, $A \subset E$, $A, E \in \mathcal{F}$,

to $\int_E f d\mu = \mu(A)$

(bo $\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{E \setminus A} f d\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(E \setminus A) = \mu(A)$).

$\Rightarrow$ ③ jeżeli $E \in \mathcal{F}$, f, g są mierzalne wzgl. $\mathcal{F}$ i nieujemne na E oraz $f = g$ p.w. na E,

to $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

(bo niech $E_1 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$; $\mu(E_1) = 0$

$E_2 = E \setminus E_1$, wtedy

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu = 0 + \int_{E_2} g\,d\mu = \int_{E_1} g\,d\mu + \int_{E_2} g\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

<u>Twierdzenie</u> (Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.)

Niech (f_j) będzie ciągiem funkcji mierzalnych wzgl. $\mathcal{F}$, $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ~~or~~ takim, że

(1) ciąg f_i jest niemalejący, tzn. $\overset{(*)}{\forall_{\substack{x\in X\\ j\in\mathbb{N}}}} \; f_{j+1}(x) \geq f_j(x)$

(2) dla pewnego $E \in \mathcal{F}$ $\quad \forall_j \overset{(**)}{\forall_{x\in E}} \; f_j(x) \geq 0$

Wtedy $\displaystyle\int_E \left(\lim_{j\to\infty} f_j\right) d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu$

<u>Zadanko:</u> W $(*)$ oraz $(**)$ możemy $x\in X$ i $x \in E$ zastąpić: dla μ-p.w. $x\in X$ i dla μ-p.w. $x\in E$.

~~Dowód~~: <u>Uwaga:</u> Granica pod całką istnieje (być może jest $+\infty$) dla wszystkich x, bo (1).

<u>Dowód:</u> Oznaczmy $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \in [0,\infty]$; jak wiemy, jest to funkcja mierzalna; z monotoniczności całki i tego, że $\forall_{j,x}$ $f_j(x) \leq f(x)$ ~~ka~~ mamy

$$\forall_j \quad \int_E f_j\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu, \text{ zatem}$$

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,d\mu.$$

Pozostaje wykazać odwrotną nierówność.

Rozłóżmy E na trzy rozłączne zbiory:

$E_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}$, $E_+ = \{x \in E : f(x) \in (0, \infty)$

oraz $E_\infty = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$.

Wszystkie trzy są oczywiście mierzalne.

1. Na E_0: $f(x) = 0$, ciąg $f_j(x)$ jest niemalejący i nieujemny, $f_j(x) \to f(x) \Rightarrow \forall_j \; f_j(x) = 0$

Stąd $\forall_j \int_{E_0} f_j \, d\mu = 0 = \int_E f \, d\mu$.

2. Ustalmy $\theta \in (0,1)$. Dla każdego $x \in E_+$ mamy

$f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x) > \theta \cdot f(x)$,

więc istnieje m_x takie, że $\forall_{j > m_x} \; f_j(x) > \theta f(x)$.

Oznaczmy $E_m = \{x \in E_+ : f_m(x) > \theta f(x)\}$,

z tego, co wyżej wiemy, że

$\forall_{x \in E_+} \exists_{m_x} \forall_{j > m_x} \quad x \in E_j$,

a więc $E_+ = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$,

z monotoniczności (f_j) mamy też od razu $E_m \subset E_{m+1}$ $m \in \mathbb{N}$

Rozważmy miarę na E_+: $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$.

Mamy $\nu(E_+) = \int_{E_+} f \, d\mu \geq \int_{E_+} f_m \, d\mu \geq \int_{E_m} f \, d\mu \geq \theta \int_{E_m} f \, d\mu =$

$= \theta \nu(E_m) \xrightarrow{m \to \infty} \theta \nu(E_+)$, bo $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$

oraz $E_+ = \bigcup_i E_i$

$$\text{czyli } \forall_m \ \nu(E_+) \geq \int_{E_+} f_m \, d\mu \geq \theta \nu(E_+)$$

$$\Rightarrow \nu(E_+) \geq \lim_{m\to\infty} \int_{E_+} f_m \, d\mu \geq \theta \nu(E_+).$$

i nierówności te zachodzą dla każdego $\theta \in (0,1)$, więc (biorąc $\lim\limits_{\theta\to 1^-}$ dostajemy, że)

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \int_{E_+} f\,d\mu}}{\nu(E_+)} = \lim_{m\to\infty} \int_{E_+} f_m \, d\mu .$$

3. Zostało nam E_∞. Ustalmy $M>0$ i niech

$A_m = \{x \in E_\infty : f_m(x) \geq M\}$.

Oczywiście $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ i $\bigcup_m A_m = E_\infty$,

więc

$$\int_{E_\infty} f\,d\mu \geq \int_{E_\infty} f_m\,d\mu \geq \int_{A_m} f_m\,d\mu \geq M\mu(A_m) \xrightarrow{m\to\infty} M\mu(E_\infty)$$

czyli

$$\int_{E_\infty} f\,d\mu \geq \lim_{m\to\infty} \int_{E_\infty} f_m\,d\mu \geq M\mu(E_\infty)$$

i $M>0$ jest dowolne.

Stąd

$$\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\geq$} \\ \int_{E_\infty} f\,d\mu}}{\lim_{m\to\infty} \int_{E_\infty} f_m\,d\mu} \geq \infty \cdot \mu(E_\infty) = \left\{\begin{array}{ll} \infty & \text{gdy } \mu(E_\infty)>0 \\ 0 & \text{gdy } \mu(E_\infty)=0 \end{array}\right\} = \int_{E_\infty} f\,d\mu$$

Dodając rezultaty punktów 1., 2. i 3. dostajemy nie tylko odwrotną nierówność, ale wręcz równość z tezy twierdzenia. $\square$.

Dość oczywista <u>uwaga</u>:

Jeżeli $h: X \to \mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją prostą, $h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$ dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,\infty)$, $A_1, \dots, A_N$ mierzalnych, parami rozłącznych,

to $$\int_X h \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i)$$

<u>Dowód</u>: Niech $\nu(A) = \int_A h \, d\mu$; wiemy już, że ν jest miarą na $\mathcal{F}$.

$$\int_X h \, d\mu = \nu(X) = \nu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + \sum_{i=1}^{N} \nu(A_i) =$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i},$$ bo h jest stała na każdym z tych zbiorów.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli $f, g: X \to \mathbb{R}$ są nieujemnymi funkcjami prostymi, to $\forall_{E \in \mathcal{F}} \int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$.

<u>Dowód</u>: istnieją <u>parami rozłączne</u> $A_1, \dots, A_N$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in [0,\infty)$

<u>———— " ————</u> $B_1, \dots, B_M$ i $\beta_1, \dots, \beta_M \in [0,\infty)$

takie, że $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{B_j}$

Ustalmy $E \in \mathcal{F}$ i niech $\tilde{A}_i = A_i \cap E \quad i=1,\dots,N$

$\tilde{B}_j = B_j \cap E \quad j=1,\dots,M.$

Połóżmy dodatkowo $\tilde{A}_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{A}_i \qquad \alpha_0 = 0$

$B_0 = E \setminus \bigcup_{j=1}^{M} \tilde{B}_j \qquad \beta_0 = 0.$

Wtedy $\forall_{x \in E}$
$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{\tilde{A}_i}(x)$$
$$g(x) = \sum_{j=0}^{M} \beta_j \chi_{\tilde{B}_j}(x)$$

i zbiory $\cancel{A}$ $C_{ij} = \tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j$ są parami rozłączne,

$\bigcup_{i,j} C_{ij} = E$, $(f+g)(x) = \alpha_i + \beta_j$ dla $x \in C_{ij}$.

Stąd
$$\int_E (f+g)\,d\mu = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \int_{C_{ij}} (f+g)\,d\mu = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} (\alpha_i+\beta_j)\mu(C_{ij})$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{M} \mu(C_{ij})\right)}_{=\mu(\tilde{A}_i)} + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \mu(C_{ij})\right)}_{=\mu(\tilde{B}_j)} =$$
$$= \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

$\square$.

Twierdzenie: Niech $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będą mierzalne i nieujemne. Wtedy

$$\forall_{E \in \mathcal{F}} \quad \int_E (f+g)\,d\mu \overset{(*)}{=} \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu .$$

Dowód: Wiemy już, że (*) zachodzi gdy f i g są funkcjami prostymi. Niech zatem

$f_k : X \to [0,\infty)$
$g_k : X \to [0,\infty)$
będą niemalejącymi ciągami funkcji prostych, zbieżnymi punktowo odpowiednio do f i g.

Oczywiście wtedy $f_k + g_k \nearrow f+g$.

Mamy

$$\int_E (f_k+g_k)\,d\mu = \int_E f_k\,d\mu + \int_E g_k\,d\mu$$

z tw. Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej $\longrightarrow$ $\downarrow$ $\quad\downarrow\quad\downarrow$

$$\int_E (f+g)\,d\mu \qquad \int_E f\,d\mu \qquad \int_E g\,d\mu$$

i stąd teza. $\square$.

Wniosek: Całka z nieujemnych funkcji mierzalnych jest „pół-liniowa": $\forall_{\alpha,\beta \geq 0}$ $\forall_{f,g}$ nieujemnych i mierzalnych i $\forall_{E \in \mathcal{F}}$

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu .$$