Naszym krótkoterminowym celem jest ustalenie, jak zachowuje się miara Lebesgue'a przy ważnych klasach przekształceń $\mathbb{R}^n$ w siebie:

- przekształceniach liniowych
- przekształceniach lipszycowskich

i ogólnie w przekształceniach ciągłych.

Na początek jeden wynik pozytywny:

Lemat: Niech $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie postaci $\Phi(x) = a + \alpha x$ dla pewnych $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dowolnego $E \subset \mathbb{R}^n$

(•) $\lambda_n^*(\Phi(E)) = |\alpha|^n \lambda_n^*(E)$

(••) jeżeli E jest mierzalny, to $\Phi(E)$ też.

Dowód: W oczywisty sposób (•) zachodzi dla przedziałów, więc jeżeli $\{P_i\}$ jest takim pokryciem zbioru E przedziałami, że $\sum_i \mathrm{vol}(P_i) \leq \lambda_n^*(E) + \frac{\varepsilon}{|\alpha|^n}$ (dla jakiegoś ustalonego $\varepsilon > 0$), to $\{\Phi(P_i)\}$ jest pokryciem zbioru $\Phi(E)$ przedziałami, spełniającym

$$\lambda_n^*(\Phi(E)) \leq \sum_i \lambda_n^*(\Phi(P_i)) = |\alpha|^n \sum_i \mathrm{vol}(P_i) \leq |\alpha|^n \lambda_n^*(E) + \varepsilon,$$

więc z dowolności $\varepsilon > 0$ $\lambda_n^*(\Phi(E)) \overset{(*)}{\le} |\alpha|^n \lambda_n^*(E)$

Dla $\alpha \neq 0$ Φ jest odwracalne i $\Phi^{-1}(y) = -\frac{1}{\alpha} a + \frac{1}{\alpha} y$;

więc stosując $(*)$ do Φ^{-1} dostajemy

$$\lambda_n^*(\Phi^{-1}(\Phi(E))) \le \frac{1}{|\alpha|^n} \lambda_n^*(\Phi(E))$$

$$\parallel$$

$\lambda_n^*(E)$, a więc nierówność w drugą stronę; przypadek $\alpha = 0$ jest oczywiście trywialny.

To dowodzi $(\circ)$.

Teraz $(\circ\circ)$

Z $(\circ)$ wynika od razu, że Φ przekształca zbiory miary zero w zbiory miary zero.

Niech $F \subset E$ będzie typu F_σ, tż $\lambda_n^*(E \setminus F) = 0$.

Wtedy $\Phi(F)$ też jest typu F_σ (dlaczego?),

$\Phi(E) \setminus \Phi(F) \subset \Phi(E \setminus F)$ (a tak naprawdę, dzięki odwracalności Φ, tu jest równość)

więc $\Phi(E) \setminus \Phi(F)$ jest miary zero.

Z charakteryzacji zbiorów mierzalnych $\Phi(E)$ jest więc mierzalny.

$\square$

Wniosek: Dla każdej kuli $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi równość $\lambda_n^*(B(x,r)) = \omega_n r^n$, gdzie $\omega_n = \lambda_n^*(B(0,1))$.

Dowód: $B(x,r) = \Phi(B(0,1))$, gdzie $\Phi(z) = x + rz$

Kolejny wniosek: Dla wszystkich x, r

$$\lambda_n^*(\overline{B}(x,r)) = \lambda_n^*(B(x,r)) = \omega_n r^n,$$

~~Dowg~~ $\lambda_n^*(\partial \overline{B}(x,r)) = \lambda_n^*(S(x,r)) = 0.$

Dowód:

Dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_n^*(\overline{B}(x,r)) \cancel{\leq} = \lambda_n^*(B(x,r)) + \lambda_n^*(S(x,r)) & & \\ \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\geq$}} \\ \lambda_n^*(B(x,r)) & & \lambda_n^*(B(x,r+\varepsilon)) \\ \| & & \| \\ \omega_n r^n & & \omega_n (r+\varepsilon)^n \end{array}$$

i biorąc $\varepsilon \to 0^+$ dostajemy $\lambda_n^*(\overline{B}(x,r)) = \omega_n r^n$,

i $\lambda_n^*(S(x,r)) \leq \omega_n((r+\varepsilon)^n - r^n)$ dla każdego $\varepsilon > 0$

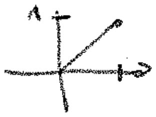
skąd $\lambda_n^*(S(x,r)) = 0$.

$\square$.

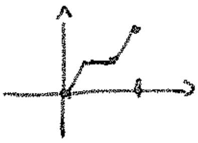
No to przyjrzyjmy się następującemu przykładowi

Przykład (schody Cantora)

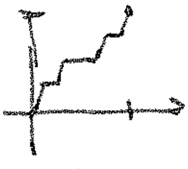
Konstruujemy ciąg funkcji ciągłych na $[0,1]$:



$f_0(x) = x$



$$f_1(x) = \begin{cases} 3/2\, x & x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3/2\, x - 1/2 & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$



i dalej,

$$f_2(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{na } [1/3, 2/3] \\ 1/4 & \text{na } [1/9, 2/9] \\ 3/4 & \text{na } [7/9, 8/9] \end{cases}$$ a pomiędzy uzupełniamy liniowo, $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$.

i tak dalej.

Łatwo można sprawdzić, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny ($|f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^k}$, więc dla $k, m > N$ $|f_k(x) - f_m(x)| < \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N}$), jego granica jest więc funkcją ciągłą f, a że wszystkie f_k są niemalejące, to i $f:[0,1]\to[0,1]$ jest niemalejąca; $f(0)=0$, $f(1)=1 \Rightarrow f$ jest na.

Zauważmy, że jeżeli $C\subset[0,1]$ jest standardowym zbiorem Cantora, to $f(C)=[0,1]$.

Stąd funkcja ciągła *może* przekształcać zbiory miary zero na zbiory miary dodatniej.

Def: Mówimy, że f ma własność Łuzina (spełnia warunek Łuzina), jeżeli f przekształca zbiory miary (Lebesgue'a) zero w zbiory miary zero.

Aby pociągnąć ten przykład dalej, potrzebujemy kilku lematów:

Lemat 1: Jeżeli $E\subset\mathbb{R}$ jest mierzalny i $\lambda_1(E)>0$, to $E-E$ (różnica Minkowskiego) zawiera przedział o środku w 0.

Dowód. Bso możemy założyć, że E jest ograniczony (bo jeśli $J\subset\mathbb{R}$ jest odcinkiem, $\tilde{E} = J\cap E$, to $\tilde{E}-\tilde{E}\subset E-E$, wystarczy więc wykazać tezę dla $\tilde{E}$).

Niech $\mathcal{U} \supset E$ będzie otwarty, ograniczony i taki, że $\lambda_1(\mathcal{U}) < 4/3\, \lambda_1(E)$. (*)

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ jest otwarty, więc jest sumą rozłącznych odcinków otwartych: $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Niech $E_i = E \cap I_i$.

Gdyby dla każdego i $\lambda_1(I_i) \overset{\otimes}{\geq} \frac{4}{3}\lambda_1(E_i)$, to przeczyłoby to (*) (zbiory E_i są rozłączne i mierzalne, podobnie I_i, moglibyśmy dodać wszystkie $\otimes$ stronami). Stąd dla pewnego $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda_1(I_k) \overset{(**)}{<} \frac{4}{3}\lambda_1(E_k)$$

Wykażemy teraz, że $(-\frac{1}{2}|I_k|, \frac{1}{2}|I_k|) \subset E-E$.

Załóżmy przeciwnie: istnieje $y \in (-\frac{1}{2}|I_k|, \frac{1}{2}|I_k|) \setminus (E-E)$.

Skoro $y \notin E-E$, to $E \cap (E+y) = \emptyset$, w szczególności $E_k \cap (E_k+y) = \emptyset$. Wtedy

$$2\lambda_1(E_k) = \lambda_1(E_k+y) + \lambda_1(E_k) = \lambda_1\left(\left(\overset{\overset{I_k+y}{\cup}}{E_k+y}\right) \cup \overset{\overset{I_k}{\cup}}{E_k}\right))$$

$$\leq \lambda_1\left(\underbrace{(I_k+y) \cup I_k}_{\text{to jest przedział o dług. } |I_k|+|y|}\right) = |I_k| + |y| < \frac{3}{2}|I_k|.$$

To jednak przeczy (**).

Lemat 2

Każdy zbiór $E \subset \mathbb{R}$ o dodatniej mierze zewnętrznej Lebesgue'a zawiera zbiór niemierzalny.

Dowód: Niech V będzie zbiorem Vitalego, $V_t = V + t$. Wtedy dla $t, s \in \mathbb{Q}$, $t \neq s$ mamy $V_t \cap V_s = \emptyset$ i $\bigcup_{t \in \mathbb{Q}} V_t = \mathbb{R}$.

Niech teraz $E_t = E \cap V_t$; oczywiście $E = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} E_t$, E_t są rozłączne, więc

$$0 < \lambda_1^*(E) \overset{\boxtimes}{\leq} \sum_{t \in \mathbb{Q}} \lambda_1^*(E_t).$$

Teraz:

- albo wszystkie E_t są mierzalne i miary zero

  ale to jest sprzeczne z $\boxtimes$,
- albo istnieje $t \in \mathbb{Q}$ t.ż. E_t jest mierzalny i $\lambda_1^*(E_t) > 0$,

  ale wtedy $E_t - E_t$ zawiera pewien przedział o środku w 0. Mamy jednak $E_t - E_t \subset V_t - V_t = V - V$, i łatwo sprawdzić, że zbiór $V - V$ nie zawiera żadnej liczby wymiernej.
- albo któryś ze zbiorów E_t jest niemierzalny co dowodzi tezy lematu. $\square$.

Ciąg dalszy przykładu:

Niech f będzie, jak wcześniej, funkcją Cantora, $f:[0,1]\to[0,1]$ i niech $g(x)=f(x)+x$.

Wtedy $g:[0,1]\to[0,2]$ jest ściśle rosnąca i ciągła, a więc istnieje ciągła funkcja odwrotna $g^{-1}:[0,2]\to[0,1]$.

Niech $C\subset[0,1]$ będzie zbiorem Cantora,

$[0,1]\setminus C = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ← suma rozłącznych odcinków otwartych.

Wtedy na każdym z I_i funkcja f jest stała, $f(I_i)=\alpha_i$, więc $g(I_i)=\alpha_i+I_i$.

Stąd ~~$\lambda_1([0,1]\setminus C)=$~~ $\lambda_1(g([0,1]\setminus C))=$

$$=\sum_i \lambda_1(\alpha_i+I_i)=\sum_i |I_i|=\lambda_1([0,1]\setminus C)=1.$$

Tym samym $\lambda_1(g(C))=\lambda_1([0,2])-\lambda_1(g([0,1]\setminus C))$

$$=2-1=1.$$

W zbiorze $E=g(C)$ istnieje zbiór niemierzalny A.

Wtedy $g^{-1}(A)\subset C$, więc $Z=g^{-1}(A)$ jest miary zero, w szczególności jest mierzalny. $g(Z)=A$, $g^{-1}(A)=Z$

Wniosek: funkcja ciągła może przekształcać zbiory mierzalne w niemierzalne, i niemierzalne w mierzalne.

No dobrze, wróćmy do przekształceń lipszycowskich.

Chcemy wykazać

<u>Twierdzenie</u>: Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty, załóżmy, że $F: U \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. Wówczas dla dowolnego mierzalnego $E \subset U$ zbiór $F(E)$ jest mierzalny oraz $\lambda_n(F(E)) \leq L^n \lambda_n(E)$.

Dowód będzie przez serię lematów.

<u>Lemat 1</u>: Niech $\overline{B} \subset U$ będzie kulą domkniętą.
Wówczas $\lambda_n(F(\overline{B})) \leq L^n \lambda_n(\overline{B})$ $\Big\}$ w szczególności $F(\overline{B})$ jest mierzalny

<u>Dowód</u>: · $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarta
$\Rightarrow F(\overline{B})$ też jest zwarty, a więc borelowski $\Rightarrow F(\overline{B})$ jest mierzalny.

· niech ~~x~~ $\overline{B} = \overline{B}(x,r)$, wtedy $\forall y \in \overline{B}$

$\|F(y) - F(x)\| \leq L\|y-x\| \leq Lr$, więc $F(\overline{B}) \subset \overline{B}(F(x), Lr)$.

Stąd $\lambda_n(F(\overline{B})) \leq \lambda_n(\overline{B}(F(x), Lr)) = L^n \lambda_n(\overline{B})$.

<u>Lemat 2</u>: Istnieje stała $C(n) > 0$ (zależna tylko od wymiaru n) taka, że każdy przedział $P \subset U$ można pokryć skończoną rodziną kul domkn. $\{\overline{B_1}, \dots, \overline{B_m}\}$ t.że. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_n(\overline{B_i}) \leq C(n) \lambda_n(P)$.

Zauważmy, że gdy przedział P jest bardzo daleki od kostki, to kula $\overline{B}$ opisana na P ma miarę dużo większą, nieporównywalną z miarą P.

(!) Dla kostek jest inaczej – zarówno miara kostki, jak i ~~promień~~ miara kuli nań opisanej są postaci $C(n) \cdot (\text{długość krawędzi})^n$.

Dlatego najpierw podzielimy P na przedziały „kostkopodobne", a dopiero potem zastąpimy te przedziały kulami ~~nań~~ opisanymi na nich.

Dowód Lematu 2

Niech krawędzie P to $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$;

k-tą krawędź P, dla $k = 2, 3, \dots, n$, dzielimy na $\lfloor \frac{b_k}{b_1} \rfloor$ równych części – tak dzielimy P na $m = \prod_{k=2}^{n} \lfloor \frac{b_k}{b_1} \rfloor$ przystających przedziałów P_i (o krawędziach

$$b_1, \frac{b_2}{\lfloor b_2/b_1 \rfloor}, \dots, \frac{b_n}{\lfloor b_n/b_1 \rfloor};$$ łatwo widać, że

$$\forall_{k \in \{2,3,\dots,n\}} \quad b_1 \le \frac{b_k}{\lfloor b_k/b_1 \rfloor} \le 2b_1$$

Stąd • $\lambda_n(P_i) \ge b_1^n$ dla $i = 1, \dots, m$,

• P_i zawiera się w kostce Q_i, koncentrycznej z P_i, o krawędzi $2b_1$, a kostka Q_i – w kuli $\overline{B_i}$ opisanej na Q_i, o ~~krawędzi~~ promieniu $b_1\sqrt{n}$. Stąd $P \subset \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B_i}$,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_n(\overline{B_i}) = \sum_{i=1}^{m} b_1^n n^{n/2} \omega_n = n^{n/2} \omega_n \sum_{i=1}^{m} b_1^n$$

$$\leq n^{n/2} \omega_n \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(P_i) = n^{n/2} \omega_n \lambda_n(P).$$

□.

Lemat 3

Dla dowolnego przedziału $P \subset \mathcal{U}$ zachodzi

$$\lambda_n(F(P)) \leq C(n) L^n \lambda_n(P)$$

Dowód: • $F(P)$ jest zwarty $\Rightarrow$ jest mierzalny.

• Niech $\overline{B_1}, \dots, \overline{B_m}$ będą jak w Lemacie 2.

Wtedy $F(P) \subset F(\overline{B_1}) \cup \dots \cup F(\overline{B_m})$, więc

$$\lambda_n(F(P)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_n(F(\overline{B_i})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemat 1}}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} L^n \lambda_n(\overline{B_i}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemat 2}}}{\leq} L^n c(n) \lambda_n(P).$$

□.

Lemat 4: Dla dowolnego mierzalnego $E \subset \mathcal{U}$ zachodzi

$$\lambda_n^*(F(E)) \leq C(n) L^n \lambda_n(E).$$

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\{P_i\}$ będzie pokryciem E przedziałami domkniętymi tż. $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_i) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon$. Wtedy $F(E) \subset \bigcup_i F(P_i)$, więc

$$\lambda_n^*(F(E)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(F(P_i)) \le \sum_{i=1}^{\infty} C(n)L^n \lambda_n(P_i)$$

$$\le C(n)L^n \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(P_i) \le C(n)L^n(\lambda_n(E)+\varepsilon)$$

i z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy tezę.

<u>Wniosek 1</u>: F przekształca zbiory miary zero w zbiory miary zero.

<u>Wniosek 2</u>: F przekształca zbiory mierzalne w zbiory mierzalne.

<u>Dowód wniosku 2</u>: Wystarczy wykazać, że F przekształca ograniczone zbiory mierzalne w zbiory mierzalne (dlaczego?).

Niech E będzie ograniczony i mierzalny.
Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K \subset E$ będzie domknięty ($\Rightarrow$ zwarty) taki, że $\lambda_n(E \setminus K) < \frac{\varepsilon}{C(n)L^n}$.

Wtedy $E = K \cup (E \setminus K)$, więc

$F(E) = F(K) \cup F(E \setminus K)$, więc

~~$F(E \setminus K)$~~ $F(E) \setminus F(K) \subset F(E \setminus K)$.

Zbiór $F(K)$ jest zwarty i

$$\lambda_n^*(F(E) \setminus F(K)) \le \lambda_n^*(F(E \setminus K)) \overset{\text{Lemat 4}}{\le} C(n)L^n \lambda_n(E \setminus K) < \varepsilon.$$

Z charakteryzacji zbiorów mierzalnych zbiór $F(E)$ jest mierzalny.

Ostatni lemat wymaga najwięcej pracy, jego dowód zobaczą Państwo na ćwiczeniach.

__Def:__ Niech $E\subset\mathbb{R}^n$. __Pokryciem Vitaliego__ zbioru E nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B}$ kul domkniętych w $\mathbb{R}^n$, że

$(\cdot)$ $E\subset\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ (czyli $\mathcal{B}$ jest pokryciem E)

oraz $(\cdot\cdot)$ $\forall_{x\in E}\ \inf\{\operatorname{diam}\overline{B} : \overline{B}\in\mathcal{B},\ x\in\overline{B}\}=0$

__Lemat__ (Vitaliego o pokryciu Vitaliego)

Jeżeli $E\subset\mathbb{R}^n$, $\lambda_n^*(E)<\infty$ i $\mathcal{B}$ jest pokryciem Vitaliego zbioru E, to z $\mathcal{B}$ możemy wybrać podrodzinę przeliczalną $\{\overline{B_i}\}_{i=1}^{\infty}$ taką, że

(a) kule $\overline{B_i}$ są parami rozłączne

(b) $\lambda_n^*(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B_i})=0$.

__Wniosek:__ Niech $P\subset\mathbb{R}^n$ będzie przedziałem. Istnieje wówczas rodzina parami rozłącznych kul domkniętych $\overline{B_i}$, $i=1,2,\ldots$, taka, że $\overline{B_i}\subset P$ oraz

$\lambda_n(P\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B_i})=0$.

__Dowód wniosku:__ Rozważmy $E=\operatorname{int}P$, $\mathcal{B}=\{\overline{B}(x,r) : x\in E,\ \overline{B}(x,r)\subset E\}$. Wtedy $\mathcal{B}$ jest pokryciem Vitaliego zbioru E (bo E jest otwarty), więc z lematu Vitaliego możemy wybrać $\overline{B_1},\overline{B_2},\ldots$ parami rozłączne tak, że $\overline{B_i} \subset E \subset P$, $\lambda_n(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B_i}) = 0$,

więc $\lambda_n(P \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \lambda_n(\partial P) + \lambda_n(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$

$= 0 + 0 = 0$.

□.

Dowód twierdzenia

Krok 1 $E = P$, gdzie P jest przedziałem, $P \subset \mathcal{U}$.

Z Wniosku istnieją kule $\overline{B_1}, \overline{B_2}, \ldots$ t.ż.

$\overline{B_i}$ parami rozłączne, $\overline{B_i} \subset P$, $\lambda_n(P \setminus \bigcup_{i=1} \overline{B_i}) = 0$.

Wtedy $F(P) \subset F(P \setminus \bigcup_{i=1} \overline{B_i}) \cup \bigcup_{i=1} F(\overline{B_i})$,

więc

$$\lambda_n(F(P)) \leq \underbrace{\lambda_n\Big(F\big(P \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)\Big)}_{=0,\ \text{bo } P \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \text{ jest miary zero}} + \lambda_n\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F(\overline{B_i})\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(F(\overline{B_i})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemat 1}}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} L^n \lambda_n(\overline{B_i}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } \overline{B_i} \text{ parami rozłączne,} \\ \bigcup_i \overline{B_i} \subset P}}{\leq} L^n \lambda_n(P)$$

Krok 2 $E \subset \mathcal{U}$ dowolny mierzalny.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\{P_i\}$ będzie pokryciem E t.ż. $\lambda_n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} vol(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(P_i) \leq \lambda_n(E) + \varepsilon$.

Teraz powtarzamy dowód Lematu 4, używając Kroku 1 w miejsce Lematu 3:

Rozważmy miarę zewnętrzną
$$\mu^*(A) = \lambda_n^*(F(A)) \qquad \text{dla } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Bez trudu sprawdzamy, że jest to miara zewn. na $\mathbb{R}^n$, a jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ~~ż~~ ~~tę~~ są parami rozłączne, to $F(A_1), F(A_2), \ldots$ też, i są mierzalne, zatem

$$\mu^*(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lambda_n^*(F(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)) =$$
$$= \lambda_n^*(F(A_1) \cup F(A_2) \cup \ldots) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_n^*(F(A_i)) =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

co dowodzi, że μ^* jest miarą na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, w szczególności jest miarą zewn. borelowską na $\mathbb{R}^n$.

Widzimy też, że $\forall_{A \subset \mathbb{R}^n} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^n}$
$$\mu^*(A+x) = \lambda_n^*(F(A+x)) = \lambda_n^*(F(A)+F(x)) =$$
$$= \lambda_n^*(F(A)) = \mu^*(A),$$ czyli μ^* jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia.

Stąd ~~że~~ $\mu^*(A) = \mu^*([0,1]^n) \cdot \lambda_n^*(A) \quad \forall_{A \subset \mathbb{R}^n}$.

Do tezy twierdzenia trzeba jeszcze wiedzieć, że
$$\mu^*([0,1]^n) = \lambda_n(F([0,1]^n)) = |\det F|.$$

Lemat Jeżeli $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowe, to $\lambda_n(F([0,1]^n)) = |\det F|$.

Szkic dowodu :

Rozważmy funkcję $\varphi : M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

$$\varphi(M) = \lambda_n(M([0,1]^n)).$$

Wtedy (1) $\varphi(\alpha \cdot \mathrm{Id}) = |\alpha|^n$

(2) $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

i zostaje nam zadanie z GALu:

jedyną funkcją spełniającą warunki (1) i (2) jest $\varphi(M) = |\det M|$.

Rozwiązanie w skrypcie Strzeleckiego (Lemat 4.34).

Twierdzenie: Niech $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.
Wówczas $A\times B\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ i $\lambda_{n+m}(A\times B)\overset{(*)}{=}\lambda_n(A)\lambda_m(B)$.

Dowód

Krok 1 (*) zachodzi, gdy A i B są przedziałami, bo wtedy $A\times B$ jest przedziałem i

$$\lambda_{n+m}(A\times B)=\mathrm{vol}_{n+m}(A\times B)=\mathrm{vol}_n(A)\,\mathrm{vol}_m(B)=\lambda_n(A)\lambda_m(B)$$

Krok 2 Jeżeli A i B są otwarte, to możemy je przedstawić jako sumy (przeliczalne) kostek diadycznych,

$$A=\bigcup_i P_i\ ,\quad B=\bigcup_j Q_j\ ,\quad \text{takie, że } \lambda_n(A)=\sum_i\lambda_n(P_i)$$
$$\lambda_m(B)=\sum_j\lambda_m(Q_j).$$

P_i mają parami rozłączne wnętrza, tak samo Q_j

Wtedy $A\times B=\bigcup_{i,j}P_i\times Q_j$ ← to są przedziały o parami rozłącznych wnętrzach

$$\lambda_{n+m}(A\times B)=\sum_{i,j}\lambda_{n+m}(P_i\times Q_j)\overset{\text{Krok 1}}{=}\sum_{i,j}\lambda_n(P_i)\lambda_m(Q_j)$$
$$=\Big(\sum_i\lambda_n(P_i)\Big)\Big(\sum_j\lambda_m(Q_j)\Big)=\lambda_n(A)\lambda_m(B)$$

Krok 3 Jeżeli A i B są ograniczone, typu G_δ, to

$$A=\bigcap_{j=1}^{\infty}U_j\ ,\quad U_1\supset U_2\supset\dots\ ,\quad U_1 \text{ ograniczony},$$
$$B=\bigcap_{j=1}^{\infty}V_j\ ,\quad V_1\supset V_2\supset\dots\ ,\quad V_2 \text{ ograniczony}.$$

U_j, V_j otwarte

$$\lambda_n(A)=\lim_{j\to\infty}\lambda_n(U_j),\quad \lambda_m(B)=\lim_{j\to\infty}\lambda_m(V_j).$$

Wtedy

$$A\times B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{U}_j \times V_j \ , \quad \mathcal{U}_1\times V_1 \supset \mathcal{U}_2\times V_2 \supset \dots , \quad \mathcal{U}_1\times V_1 \text{ ograniczony,}$$

więc $\lambda_{n+m}(A\times B) = \lim\limits_{j\to\infty} \lambda_{n+m}(\mathcal{U}_j\times V_j) \overset{\text{Krok 2}}{=}$

$$= \lim_{j\to\infty} \lambda_n(\mathcal{U}_j)\lambda_m(V_j) = \lambda_n(A)\lambda_m(B).$$

W krokach 1-3 mierzalność $A\times B$ była oczywista.

<u>Krok 4</u> Jeżeli A, B są ograniczone i któryś z nich ma miarę zero (bso możemy założyć, że $\lambda_m(B)=0$), to dla ustalonego $\varepsilon>0$ znajdziemy $\mathcal{U}\supset B$ otwarty w $\mathbb{R}^m$ tż $\lambda_m(\mathcal{U})<\varepsilon$.

Zbiór A jest ograniczony $\Rightarrow$ $A\subset V=B(0,R)\subset\mathbb{R}^n$ dla dost. dużego $R>0$;

$$\lambda_{n+m}(A\times B) \leq \lambda_{n+m}(V\times\mathcal{U}) \text{ [illegible] } = \lambda_n(V)\lambda_m(\mathcal{U}) <$$
$$< \omega_n R^n\cdot\varepsilon$$

i z dowolności $\varepsilon>0$ $\lambda_{n+m}(A\times B)=0$,

W szczególności $A\times B$ jest mierzalny.

<u>Krok 5</u> Jeżeli A i B są ograniczone i mierzalne (w sensie Lebesgue'a), to istnieją $X\supset A$ i $Y\supset B$ typu G_δ tż $\lambda_n(X\setminus A)=0=\lambda_m(Y\setminus B)$, X, Y ograniczone

$\lambda_n(X)=\lambda_n(A) \qquad \lambda_m(Y)=\lambda_m(B)$

Wtedy

$$\lambda_{n+m}(X\times Y) = \lambda_{n+m}\big(A\times B \cup (X\setminus A)\times B) \cup (A\times(Y\setminus B)) \cup (X\setminus A)\times(Y\setminus B)\big)$$
$$= \lambda_{n+m}(A\times B) + \lambda_{n+m}((X\setminus A)\times B) + \lambda_{n+m}(A\times(Y\setminus B)) +$$
$$+ \lambda_{n+m}((X\setminus A)\times(Y\setminus B))$$

$\parallel$ (pod $\lambda_{n+m}(X\times Y)$)

$$\lambda_n(X)\cdot\lambda_m(Y) = \lambda_n(A)\cdot\lambda_m(B)$$

$\parallel$ Krok 4

$\lambda_{n+m}(A\times B)$.

i ostatni Krok 6 A, B mierzalne w sensie Lebesgue'a,

to $A_j = A \cap B(0,j) \subset \mathbb{R}^n$ $\quad A_1 \subset A_2 \subset \dots$, więc $\lambda_n(A) = \lim_j \lambda_n(A_j)$

$B_j = B \cap B(0,j) \subset \mathbb{R}^m$ $\quad \lambda_m(B) = \lim_j \lambda_m(B_j)$

$A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$

$A \times B = \bigcup_j A_j \times B_j$

więc $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lim_{j \to \infty} \lambda_{n+m}(A_j \times B_j) \overset{\text{Krok 5}}{=} \lim_{j\to\infty} \lambda_n(A_j)\lambda_m(B_j) = \lambda_n(A)\lambda_m(B)$.

W Kroku 5 przedstawiliśmy $A \times B$ jako różnicę $X \times Y \leftarrow$ typu G_δ i zbioru miary zero, więc $A \times B$ jest mierzalny. W Kroku 6 $A \times B$ jest sumą zbiorów mierzalnych $A_j \times B_j$, więc jest mierzalny. ∎.

To twierdzenie jest przejawem ogólniejszej struktury.

Def: Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X,
ν^* — miarą zewnętrzną na Y.

Wówczas $\mu^* \times \nu^*$, zdefiniowaną ~~jako~~ dla $E \subset X \times Y$

$$(\mu^* \times \nu^*)(E) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)\nu^*(B_i) : \begin{array}{l} A_i \text{ są mierzalne względem } \mu^* \\ B_i \text{ są mierzalne względem } \nu^* \\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \end{array} \Big\}$$

nazywamy miarą zewnętrzną produktową lub produktem miar zewnętrznych μ^* i ν^*.

Zadania:

1. Sprawdzić, że tak zdefiniowane $\mu^* \times \nu^*$ rzeczywiście jest miarą zewn. na $X \times Y$

2. Wykazać, że $\lambda_n = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1$

Do miar produktowych niebawem wrócimy.

Funkcje mierzalne

Def: Przestrzeń mierzalna to trójka $(X, \mathcal{F}, \mu)$:

- X – zbiór
- $\mathcal{F}$ – σ-ciało podzbiorów X
- μ – miara na σ-ciele $\mathcal{F}$.

Przykłady: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$
$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$

dla $\mathcal{U} \subset$ ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$: $(\mathcal{U}, \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : A \subset \mathcal{U}\}, \lambda_n)$

Jeżeli μ spełnia dodatkowo warunek $\mu(X) = 1$,
to X nazywamy przestrzenią probabilistyczną
elementy $\mathcal{F}$ – zdarzeniami
μ – prawdopodobieństwem
a teorię takich przestrzeni mierzalnych – rachunkiem prawdopodobieństwa.

Def: Funkcję $f: X \longrightarrow [-\infty, \infty] \overset{ozn}{=} \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy **mierzalną** (względem σ-ciała $\mathcal{F}$), gdy

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}.$$

- gdy $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$,
  (ew. $X = \mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$)

  to funkcje mierzalne wzgl. $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy **funkcjami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a**.

- jeżeli $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną, to funkcje mierzalne wzgl. $\mathcal{F}$ nazywamy **zmiennymi losowymi**.

Zachodzi prościutkie

Stwierdzenie: Niech $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Nast. warunki są równoważne:

a) funkcja f jest mierzalna względem $\mathcal{F}$

b) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$

c) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$

d) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$

Dowód:

a) ⇒ c), bo $\{x\in X: f(x)\le a\}$ to dopełnienie $\{x\in X: f(x)>a\}$, ~~a~~ ten ostatni zbiór należy do $\mathcal{F}$.

c) ⇒ b): oznaczmy $Y_t = \{x\in X: f(x)\le t\}$. Wiemy, że $\forall_{t\in\mathbb{R}}\ Y_t\in\mathcal{F}$, ~~ale~~ zatem

$$\{x\in X: f(x)<a\} = \bigcup_{\substack{t\in\mathbb{Q}\\ t<a}} Y_t \,, \in \mathcal{F}.$$

b) ⇒ d), bo $\{x\in X: f(x)\ge a\}$ to dopełnienie $\{x\in X: f(x)<a\}$, a ten zbiór leży w $\mathcal{F}$

d) ⇒ a) tak samo, jak c) ⇒ b). $\square$.

Stwierdzenie:

Jeżeli $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ~~to~~ f mierzalna względem $\mathcal{F}$, to $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$.

Dowód (szkic): Wprost z definicji σ-ciała sprawdzamy, że $\mathcal{G} = \{A\subset\mathbb{R} : f^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$ jest σ-ciałem w $\mathbb{R}$.

Skoro f jest mierzalna, to $\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a<b}}$

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}([-\infty,b)\cap(a,+\infty]) = \underbrace{\overset{\overset{\mathcal{F}}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{f^{-1}([-\infty,b))} \cap \overset{\overset{\mathcal{F}}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{f^{-1}((a,+\infty])}}_{\in\mathcal{F}}$$

To oznacza, że $(a,b)\in\mathcal{G}$. Każdy otwarty niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ zawiera wszystkie zbiory otwarte

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{G}$. $\square$.