Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy pojęcia ciała i σ-ciała zbiorów, miary zewnętrznej (na zbiorze) i miary (na σ-ciele). Wykazaliśmy też, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem i μ - miarą na $\mathcal{F}$, to:

Lemat: Jeżeli $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \in \mathcal{F}$, to

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

i podobnie, jeżeli $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{F}$ i dodatkowo $\mu(A_1) < \infty$, to

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

W wielu sytuacjach, szczególnie w rachunku prawdopodobieństwa, przydaje się też poniższy lemat

Lemat Borela-Cantellego:
Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem, μ - miarą na $\mathcal{F}$ i niech $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}$ spełniają $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$. Wówczas $B = \{x : x \text{ należy do nieskończenie wielu } A_i\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{F}$ i $\mu(B) = 0$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$.
Jeżeli bowiem $x \in B$, to dla każdego $i \in \mathbb{N}$ $x \in \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$; jeżeli zaś $\forall_{i\in\mathbb{N}}\ x \in \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$, to x musi należeć do ∞-wielu A_l (w p.p. wystarczy wziąć $i = \max(l : x \in A_l) + 1$).

Stąd i z definicji σ-ciała mamy, że $B \in \mathcal{F}$.

Teraz z lematu

$$\mu(B) = \lim_{i\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \leq \lim_{i\to\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(A_j) = 0$$

bo $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$

bo szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ jest zbieżny.

Def: Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Mówimy, że zbiór $A \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego jeżeli dla każdego $Z \subset X$

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(\underbrace{Z \setminus A}_{Z \cap (X \setminus A)}).$$

Uwaga: Jeżeli $\mu^*(A) = 0$, to ~~wa~~ A spełnia w. Carathéodory'ego.

Twierdzenie Carathéodory'ego: Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Rodzina $\mathcal{F}$ wszystkich $A \subset X$ spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem, a miara zewnętrzna μ^* jest miarą na $\mathcal{F}$.

Dowód: Sprawdźmy najpierw, że $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem.

- $\emptyset \in \mathcal{F}$, bo dla każdego $Z \subset X$

$$\mu^*(Z) = \underbrace{\mu^*(\emptyset \cap Z)}_{\mu^*(\emptyset) = 0} + \underbrace{\mu^*(Z \setminus \emptyset)}_{\mu^*(Z)}.$$

- rodzina $\mathcal{F}$ jest zamknięta ze względu na dopełnienia, bo jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to dla każdego $Z \subset X$

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(Z \cap (X \setminus A)),$$

a więc $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

- rodzina $\mathcal{F}$ jest zamknięta ze względu na (skończone) sumy zbiorów: wykażemy, że jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cup B \in \mathcal{F}$ (a dalej przez oczywistą indukcję). Zauważmy, że $Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup ((Z \setminus A) \cap B)$

$$Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \setminus B.$$

i

$$\mu^*(Z) \overset{\otimes}{\underset{\text{subaddytywność } \mu^*}{\leq}} \mu^*(Z \cap (A \cup B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cup B)) \leq$$

$$\leq \mu^*(Z \cap A) + \underbrace{\mu^*((Z \setminus A) \cap B) + \mu^*((Z \setminus A) \setminus B)}_{= \mu^*(Z \setminus A), \text{ bo } B \in \mathcal{F}} =$$

$$= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \underset{\text{bo } A \in \mathcal{F}}{=} \mu^*(Z)$$

więc w $\otimes$ jest równość $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Stąd $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów. To, czy jest σ-ciałem, odłóżmy na za chwilę, na razie przyjrzyjmy się własnościom μ na $\mathcal{F}$.

- jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ są rozłączne, to $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Dla dowolnego $Z \subset X$ mamy

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) = \mu^*(\overbrace{Z \cap (A \cup B) \cap A}^{= Z \cap A,\ \text{bo } A \text{ i } B \text{ są rozłączne}}) + \mu^*(\underbrace{(Z \cap (A \cup B)) \setminus A}_{= Z \cap B,\ \text{bo } A \text{ i } B \text{ są rozłączne}}) = \quad \otimes$$

$$= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B),$$

w szczególności dla $Z = X$ dostajemy

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

(i dalej, przez oczywistą indukcję,

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu^*(A_i) \quad \text{o ile } A_i \in \mathcal{F} \text{ są rozłączne parami}$$

a z $\otimes$ $\mu^*\left(Z \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu^*(Z \cap A_i)$).

- $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem.

Niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Mamy wykazać, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Rozważmy $P_1 = A_1$, $P_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$

$P_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, wtedy

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ i zbiory P_j są parami rozłączne.

i $P_j \in \mathcal{F}$.

Dla dowolnego $Z \subset X$

$$\mu^*(Z) = \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \geq$$

bo $Z \setminus \bigcup_{j=1}^{m} P_j \supset Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$

bo P_j parami rozłączne

$$\geq \sum_{j=1}^{m} \mu^*(Z \cap P_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right),$$

w szczególności szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Z \cap P_j)$ jest zbieżny, bo jest ograniczony, mamy też

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_j) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \leq \mu^*(Z),$$

a oszacowanie w przeciwną stronę spełnione jest z subaddytywności miary zewnętrznej.

Stąd $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ spełnia warunek Carathéodory'ego

$\Rightarrow$ należy do $\mathcal{F}$.

- μ^* jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{F}$.

Niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ będą parami rozłączne.

Mamy $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu^*(A_j)$, $\boxtimes$

stąd $$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \underset{\substack{\text{w } \boxtimes \text{ bierzemy} \\ m \to \infty}}{\leq} \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \underset{\substack{\text{subaddytywność} \\ \mu^*}}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

$\square$.

<u>Zadanie</u>: Niech $\mathcal{F} \subset 2^X$ będzie σ-ciałem i μ niech będzie miarą na $\mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje miara zewnętrzna μ^* na X taka, że $\mu^*|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Jeżeli μ^* jest miarą zewnętrzną na X, to σ-ciało zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego nazywamy <u>σ-ciałem zbiorów mierzalnych</u> (względem μ^*); oznaczać je będziemy $\mathcal{F}(\mu^*)$.

Wprowadźmy jeszcze kilka definicji, które ułatwią nam mówienie o miarach:

(przypomnienie): najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie otwarte podzbiory X nazywamy <u>σ-ciałem zbiorów borelowskich</u> i oznaczamy $\mathcal{B}(X)$.

Miara zewnętrzna μ^* jest <u>regularna</u>, jeżeli dla każdego $A \subset X$ istnieje $B \subset \mathcal{F}(\mu^*)$ taki, że $A \subset B$ i $\mu^*(A) = \mu^*(B)$;

μ^* jest <u>borelowska</u>, gdy $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}(\mu^*)$

μ^* jest <u>borelowsko regularna</u>, jeżeli jest borelowska i $\forall_{A \subset X} \exists_{B \in \mathcal{B}(X)}$ ⯑ $A \subset B$ i $\mu^*(A) = \mu^*(B)$;

μ^* jest <u>miarą Radona</u>, gdy jest borelowsko regularna i dla każdego zwartego $K \subset X$ mamy $\mu^*(K) < \infty$.

<u>Zadanie</u>: Załóżmy, że μ^* jest regularna, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset X$. Wtedy $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu^*(A_k)$

{ w odróżnieniu od punktu 1. twierdzenia z poprzedniego wykładu tu nie zakładamy mierzalności A_k.

Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X, $A \subset X$. Wtedy $\nu^*(Z) := \mu^*(A \cap Z)$ nazywamy <u>obcięciem</u> miary zewn. μ^* do A i oznaczamy $\mu^* \llcorner A$ lub $\mu^*|_A$

<u>Zadanie</u>: wykazać, że $\mu^*|_A$ jest miarą zewnętrzną na X.

<u>Lemat</u>: Jeżeli μ^* jest borelowsko regularna i $A \subset \mathcal{F}(\mu^*)$, $\mu^*(A) < \infty$, to $\nu^* = \mu^*|_A$ jest miarą Radona.

<u>Dowód</u>: jest oczywiste, że gdy $K \subset X$ jest zwarty, to $\nu^*(K) < \infty$; podobnie $\mathcal{F}(\mu^*) \subset \mathcal{F}(\nu^*)$, a skoro μ^* jest borelowska, to $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{F}(\mu^*) \subset \mathcal{F}(\nu^*)$, więc i ν^* jest borelowska. Pozostaje sprawdzić, że $\forall_{Z \subset X} \exists_{B \in \mathcal{B}(X)}$ $Z \subset B$ i $\nu^*(Z) = \nu^*(B)$.

Skoro μ^* jest borelowsko regularna, to istnieje $C \in \mathcal{B}(X)$ taki, że $A \subset C$, $\mu^*(A) = \mu^*(C) < \infty$,

więc $\mu^*(C \setminus A) = \mu^*(C) - \mu^*(A) = 0$.

Jeżeli teraz $Z \subset X$, to

$$\mu^*|_C(Z) = \mu^*(C \cap Z) \stackrel{\text{bo } A \in \mathcal{F}(\mu^*)}{=} \mu^*(\underbrace{C \cap Z \cap A}_{= Z \cap A}) + \mu^*(\underbrace{(C \cap Z) \setminus A}_{\subset C \setminus A})$$

$$\leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(C \setminus A) = \mu^*(Z \cap A) = \mu^*|_A(Z)$$

$$= \nu^*(Z).$$

Stąd (dla wszystkich $Z \subset X$) $\mu^*|_C = \nu^*$.

Ustalmy teraz $Z \subset X$. Skoro μ^* jest borelowsko regularna, to istnieje $E \in \mathcal{B}(X)$ taki, że

$C \cap Z \subset E$ i $\mu^*(C \cap Z) = \mu^*(E)$.

Niech teraz $B = E \cup (X \setminus C)$. Zbiory E i C są borelowskie, więc również i B jest borelowski.

Mamy też $\nu^*(Z) = \mu^*(C \cap Z) = \mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap C) =$

$$= \mu^*(B \cap C) = \mu^*|_C(B) = \nu^*(B),$$

oraz $Z = (Z \cap C) \cup (Z \cap (X \setminus C)) \subset$

$$\subset E \cup (X \setminus C) = B,$$

więc oczywiście $\nu^*(Z) \leq \nu^*(B)$,

co dowodzi, że $\nu^*(Z) = \nu^*(B)$.

$\square$.

<u>Lemat</u>: Niech μ^* będzie borelowska na $\mathbb{R}^n$ i niech B będzie borelowski, $\mu^*(B) < \infty$. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $C \subset B$ taki, że $\mu^*(\cancel{C \setminus B}\ B \setminus C) < \varepsilon$.

Jeżeli dodatkowo μ^* jest Radona, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $U \supset B$ taki, że $\mu^*(U \setminus B) < \varepsilon$.

<u>Dowód</u>: Ustalmy $\varepsilon > 0$

Rozważmy $\nu^* = \mu^*|_B$. Miara ν^* jest w oczywisty sposób borelowska. Wykażemy teraz, że rodzina

$$\mathcal{G} = \{A \subset \mathcal{F}(\mu^*) : \text{istnieje zbiór domknięty } C \subset A \text{ taki, że } \nu^*(A \setminus C) < \varepsilon\}$$

jest zamknięta ze względu na sumy i części wspólne (przeliczalne) i zawiera zbiory otwarte i domknięte.

- $\mathcal{G}$ zawiera wszystkie domknięte podzbiory ~~z~~ $\mathbb{R}^n$ (oczywiste)

- jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, to $\bigcap_i A_i \in \mathcal{G}$.

Do każdego A_i możemy bowiem dobrać domknięty $C_i \subset A_i$ taki, że $\nu^*(A_i \setminus C_i) < \varepsilon/2^i$, wtedy $C = \bigcap_i C_i$ jest domknięty i $\nu^*(\bigcap_i A_i \setminus C) \leq$

$$\leq \nu^*\left(\bigcup_i (A_i \setminus C_i)\right) \leq \sum_i \nu^*(A_i \setminus C_i) < \varepsilon.$$

• niech $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{O}\mathcal{J}$, wtedy $\bigcup_i A_i \in \mathcal{O}\mathcal{J}$.

Dobierzmy C_i do A_i jak poprzednio, wtedy

$$Z_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i \quad \text{spełniają}$$

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots \quad \text{i} \quad \nu^*(Z_1) \leq \mu^*(B) < \infty,$$

więc
$$\nu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \nu^*\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} Z_m\Big) = \lim_{m\to\infty} \nu^*(Z_m)$$

$$\rotatebox{90}{$\leq$}$$

$$\nu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus C_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu^*(A_i \setminus C_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon,$$

więc dla dost. dużych m

$$\nu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i\Big) = \nu^*(Z_m) < \varepsilon,$$

a zbiór $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ jest domknięty.

• $\mathcal{O}\mathcal{J}$ zawiera wszystkie zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ bo każdy otwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest przeliczalną sumą zbiorów domkniętych

$\left\{ \begin{array}{l} \text{jeżeli } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ jest otwarty, to } \forall_{x\in\mathcal{U}} \exists_{\varepsilon_x > 0} \begin{array}{l} B(x,\varepsilon_x) \subset \mathcal{U}, \\ \varepsilon_x = d(x, \partial\mathcal{U}) \end{array} \\ \text{wtedy } \mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^n \cap \mathcal{U}} \overline{B}(x, \tfrac{1}{2} d(x,\partial\mathcal{U})). \end{array} \right.$

Niech teraz $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{O}\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{O}\mathcal{J}\}$.

Bez trudu sprawdzamy, że $\mathcal{H}$ jest σ-ciałem zawierającym wszystkie zbiory otwarte, więc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}$.

W szczególności $B \in \mathcal{H}$, istnieje więc domknięty $C \subset B$ t.ż. $\mu^*(B \setminus C) = \nu^*(B \setminus C) < \varepsilon$.

Teraz druga część.

Zbiory $\mathcal{U}_m = B(0,m) \setminus B$ są borelowskie i $\mu^*(\mathcal{U}_m) \leq \mu^*(\overline{B}(0,m)) < \infty$ (tu korzystamy z założenia, że μ^* jest Radona)

Dobieramy do $\mathcal{U}_m$ zbiór domknięty C_m t.ż. $C_m \subset \mathcal{U}_m$, $\mu^*(\mathcal{U}_m \setminus C_m) < \varepsilon/2^m$.

Mamy ~~tera~~ $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B \cap B(0,m) \subset \underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty} B(0,m) \setminus C_m}_{=:\,\mathcal{U}}$

Zbiór $\mathcal{U}$ jest otwarty, jako suma zbiorów otwartych.

$$\mu^*(\mathcal{U} \setminus B) = \mu^*\Big(\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} B(0,m) \setminus C_m\Big) \setminus B\Big) =$$

$$= \mu^*\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathcal{U}_m \setminus C_m)\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(\mathcal{U}_m \setminus C_m) < \varepsilon.$$

Dla miar zewnętrznych Radona na $\mathbb{R}^n$ można jeszcze lepiej:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli μ^* jest miarą zewn. Radona na $\mathbb{R}^n$, to dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy

(1) $\mu^*(A) = \inf(\mu^*(U) : A \subset U,\ U \text{ otwarty})$

a jeżeli $A \in \mathcal{F}(\mu^*)$, to

(2) $\mu^*(A) = \sup(\mu^*(K) : K \subset A,\ K \text{ zwarty})$.

<u>Dowód</u>

(1) zachodzi, gdy $\mu^*(A) = +\infty$, możemy więc założyć, że $\mu^*(A) < \infty$; Niech A będzie borelowski, wtedy $\forall_{\varepsilon > 0}$ istnieje $U \supset A$ otwarty i taki, że $\mu^*(\cancel{A \setminus U}\ U \setminus A) < \varepsilon$. Wtedy

$$\mu^*(A) \le \mu^*(U) \le \mu^*(A) + \mu^*(U \setminus A) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

To dowodzi (1) dla zbiorów borelowskich.

Skoro μ^* jest Radona, to jest borelowsko regularna

$\Rightarrow$ istnieje $B \supset A$ borelowski t.ż. $\mu^*(A) = \mu^*(B) =$

$= \inf(\mu^*(U) : U \text{ otwarty},\ B \subset U) \ge$ ← bo $A \subset B$.

$\ge \inf(\mu^*(U) : U \text{ otwarty},\ A \subset U) \ge \mu^*(A)$.

z monotoniczności μ^*

To dowodzi (1) dla dowolnych A.

Z (2) trochę trudniej.

Załóżmy na początek, że A jest zbiorem ograniczonym. Wówczas $\mu^*(A) < \infty$, bo A zawiera się w pewnym zbiorze zwartym, a że μ^* jest Radona, to miary zbiorów zwartych są skończone. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Stosując (1) do miary zewnętrznej ν^* i zbioru $\mathbb{R}^n \setminus A$ znajdujemy $\mathcal{U} \supset \mathbb{R}^n \setminus A$ otwarty taki, że $\nu^*(\mathcal{U}) < \varepsilon$ (bo $\nu^*(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$). Wtedy $C = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}$ jest domknięty, $C \subset A$ (więc C jest zwarty) i $\mu^*(A \setminus C) = \nu^*(\mathbb{R}^n \setminus C)$

$= \nu^*(\mathcal{U}) < \varepsilon$, więc

$$\mu^*(A) \le \mu^*(C) + \mu^*(A \setminus C) < \mu^*(C) + \varepsilon \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

To dowodzi (2) dla wszystkich ograniczonych zbiorów mierzalnych A.

Załóżmy zatem, że A nie jest ograniczony. Podzielmy go na przeliczalnie wiele zbiorów mierzalnych ograniczonych, np. tak: niech $A_k = A \cap (B(0,k) \setminus B(0,k-1))$ $k = 1, 2, \ldots$

Zbiory A_k są parami rozłączne i mierzalne (bo zarówno A, jak i $B(0,k) \setminus B(0,k-1)$ są mierzalne, gdyż μ^* jest borelowska), więc $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Do każdego A_k dobieramy domknięty (więc zwarty) $C_k \subset A_k$ t.że $\mu^*(A_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Niech $K_m = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$, to też są zbiory zwarte, $K_m \subset A$ i $\mu^*(K_m) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(C_k) \ge \sum_{k=1}^{m} \left(\mu^*(A_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}\right)$

$\ge \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_k) - \varepsilon$. Jeżeli teraz $\mu^*(A) = +\infty$, to szereg $\sum_{k=1} \mu^*(A_k)$ jest rozbieżny i prawa strona nierówności dąży do ∞ $\Rightarrow$ mamy ciąg zwartych $K_m \subset A$ t.ż. $\mu^*(K_m) \longrightarrow \infty = \mu^*(A)$.

Jeżeli natomiast $\mu^*(A) < \infty$, to istnieje m_0 takie, że $\sum_{k=m_0+1}^{\infty} \mu^*(A_k) < \varepsilon$. Wtedy dla $m > m_0$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(K_m) \geq \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_k) - \varepsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) - 2\varepsilon$$
$$= \mu^*(A) - 2\varepsilon.$$

To dowodzi (2) dla A mierzalnych, nieograniczonych.

Def. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, μ^* - miarą zewnętrzną na X. Mówimy, że μ^* jest metryczna, gdy dla każdych $A, B \subset X$ takich, że $\operatorname{dist}(A,B) = \inf(d(x,y) : x \in A, y \in B) > 0$ zachodzi $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Twierdzenie (kryterium Carathéodory'ego).
Każda miara zewnętrzna metryczna jest borelowska.

Zadanie: wykazać, że jest też odwrotnie.

Dowód
Wystarczy udowodnić, że każdy $U \subset X$ otwarty spełnia warunek Carathéodory'ego. Wybierzmy takie U.

Zdefiniujmy $P_m = \{x \in U : d(x, X \setminus U) = \inf\{d(x,y) : y \in X \setminus U\} \in [\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1})\}$

$$U_m = \{x \in U : d(x, X \setminus U) > \tfrac{1}{m}\}$$

Wtedy $U \setminus U_m = P_m \cup P_{m+1} \cup \ldots$

i $\operatorname{dist}(P_i, P_j) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{i-1}$ gdy $j \geq 2$, $i > j+1$.

~~Niech $P = P_1 \cup P_3 \cup \dots$~~
~~$Q = P_2 \cup P_4 \cup \dots$~~

Wybierzmy dowolny $Z \subset X$.

Jeżeli $\mu^*(Z) = +\infty$, to warunek Carathéodory'ego jest spełniony: $\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap \mathcal{U}) + \mu^*(Z \setminus \mathcal{U}) \geq \mu^*(Z)$

lewa strona równa $+\infty$. subaddytywność

Możemy zatem założyć, że $\mu^*(Z) < \infty$.

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$(1)\quad \mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap (P_1 \cup P_3 \cup \dots \cup P_{2k-1})) = \mu^*(Z \cap P_1) + \dots + \mu(Z \cap P_{2k-1})$$

i tak samo

$$(2)\quad \mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap (P_2 \cap P_4 \cap \dots \cap P_{2k})) = \mu^*(Z \cap P_2) + \dots + \mu^*(Z \cap P_{2k})$$

przechodząc w (1) i (2) z $k \to \infty$ widzimy, że szeregi

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_{2k-1})$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_{2k})$ są zbieżne,

więc
- $\mu^*(Z \cap P_k) \longrightarrow 0$
- $$\sum_{k=m}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_k) = \underbrace{\sum_{\substack{k \geq m \\ k \text{ parzyste}}} \mu^*(Z \cap P_k) + \sum_{\substack{k \geq m \\ k \text{ nieparzyste}}} \mu^*(Z \cap P_k)}_{\text{ogony tych dwóch szeregów}} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

Mamy zatem $\mu^*((\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_m) \cap Z) = \mu^*\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} (P_k \cap Z)\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu^*(Z \cap P_k) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.

Ostatecznie więc

te dwa zbiory są w odległości $\geq \frac{1}{m}$

$$\mu^*(Z\cap U)+\mu^*(Z\setminus U)\leq \mu^*(Z\cap U_m)+\mu^*(Z\setminus U)+$$

$$+\mu^*(Z\cap(U\setminus U_m)) = \mu^*(\underbrace{(Z\cap U_m)\cup(Z\setminus U)}_{\text{to jest podzbiór } Z})+\mu^*(Z\cap(U\setminus U_m))$$

$$\leq \mu^*(Z)+\underbrace{\mu^*(Z\cap(U\setminus U_m))}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0},\ \text{więc}$$

$$\mu^*(Z\cap U)+\mu^*(Z\setminus U)\leq\mu^*(Z)$$

Odwrotna nierówność, jak zawsze, wynika z subaddytywności μ^*. $\square$