Zadanie 14

Wywnioskować nierówność Bernoulliego z dwumianu Newtona dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$:

Krok 1 Zauważmy, że dla $x \in (-1, -\frac{1}{n}]$ nierówność Bernoulliego zachodzi:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

bo jej lewa strona jest dodatnia,

a prawa – ~~ujemna~~ niedodatnia: $1+nx \leq 1+n\left(-\frac{1}{n}\right) = 1-1=0$.

Krok 2. Dla $x \geq 0$ sprawdziliśmy, że nierówność Bernoulliego jest prawdziwa w poprzednim zadaniu. Pozostał nam przypadek $x \in (-\frac{1}{n}, 0)$.

Chcemy udowodnić, że

$$(1+x)^n \overset{?}{\geq} 1+nx$$

dwumian Newtona

$$= 1+nx+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n.$$

Żeby udowodnić nierówność Bernoulliego, musimy wykazać, że

$$\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n \geq 0.$$

W tej sumie składniki są na zmianę dodatnie i ujemne:

$$\binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \binom{n}{5}x^5 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

dodatni (bo $x^2>0$) — ujemny (bo $x^3<0$) — dodatni — ujemny — dodatni, jeżeli n jest parzyste; ujemny, gdy n jest nieparzyste.

Połączmy te składniki w pary: dodatni z następującym po nim ujemnym:

$$\left[\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3\right]+\left[\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{5}x^5\right]+\ldots+$$

(jeżeli n jest parzyste, to ostatni składnik: $\binom{n}{n}x^n$ pozostaje bez pary; ale gdy n jest parzyste, to ten składnik jest dodatni).

Każdy nawias ma postać

$$\left[\binom{n}{2k}x^{2k}+\binom{n}{2k+1}x^{2k+1}\right] \qquad \text{gdzie } k=1,2,3,\ldots,\left[\tfrac{n}{2}\right].$$

Wykażemy, że gdy $x>-\frac{1}{n}$, to wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie:

$$\binom{n}{2k}x^{2k}+\binom{n}{2k+1}x^{2k+1} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}x^{2k}+\frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!}x^{2k+1} =$$

$$=\frac{n!\,x^{2k}}{(2k+1)!(n-2k)!}\left(2k+1+(n-2k)x\right).$$

Czynnik $\frac{n!\ x^{2k}}{(2k+1)!\,(n-2k)!}$ jest dodatni, musimy zatem

sprawdzić znak $\left(2k+1+(n-2k)x\right)$.

$$2k+1+(n-2k)x \geqslant 2k+1+(n-2k)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=2k\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.$$

Uwaga: wiemy, że $2k\leqslant n$, więc $n-2k\geqslant 0$

$$(n-2k)x\geqslant(n-2k)\left(-\frac{1}{n}\right)$$

Stąd każdy z nawiasów kwadratowych jest dodatni; jeżeli ostatni wyraz sumy: $\binom{n}{n}x^n$ jest bez pary, to też jest dodatni, więc cała suma

$$\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{5}x^5+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

jest dodatnia,

co dowodzi nierówności Bernoulliego dla $x\in\left(-\frac{1}{n},0\right)$.

Zadanie 16

Nierówność między średnimi.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą nieujemne.

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{średnia arytmetyczna}$$

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad \text{średnia geometryczna}$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) \geqslant G_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Dowód indukcyjny

$n=1$. Dla dowolnego $x_1 \geqslant 0$ zachodzi

$$x_1 = \frac{x_1}{1} = A_1(x_1) \geqslant G_1(x_1) = \sqrt[1]{x_1} = x_1 .$$

Założenie indukcyjne

Załóżmy, że dla ~~dowo~~ pewnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ zachodzi

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant G_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Krok indukcyjny

Chcemy wykazać, że dla dowolnych $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ zachodzi nierówność

$$A_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \geqslant G_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}).$$

Oczywiście zamiana kolejności $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ nie wpływa, dzięki przemienności dodawania i mnożenia, na wartość średniej arytmetycznej i geometrycznej z tych liczb. Możemy zatem założyć, że $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_{n+1}$ (tj. że uporządkowaliśmy je od najmniejszej do największej).

Dalej będziemy pisać
$$A_{n+1} = A_{n+1}(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$$
$$G_{n+1} = G_{n+1}(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$$
$$A_n = A_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$G_n = G_n(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

~~$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$~~

$$A_{n+1} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}}{n+1} = \frac{n A_n + y_{n+1}}{n+1} =$$
$$= \frac{(n+1)A_n + y_{n+1} - A_n}{n+1} = A_n + \frac{y_{n+1} - A_n}{n+1} =$$
$$= A_n \left(1 + \frac{y_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}\right).$$

Uwaga! to mogę zrobić, gdy $A_n \neq 0$. Co, gdy $A_n = 0$ – na końcu.

Chcemy wykazać, że $A_{n+1} \overset{?}{\geq} G_{n+1} = \sqrt[n+1]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot y_{n+1}}$,

a więc że $A_{n+1}^{n+1} \overset{?}{\geq} y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot y_{n+1}$

$$A_{n+1}^{n+1} = A_n^{n+1} \underbrace{\left(1 + \frac{y_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}\right)^{n+1}}$$

ten nawias chcemy oszacować przy pomocy nierówności

Bernoulliego, ale czy

$$\frac{y_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n} > -1\ ?$$

mianownik jest ~~d~~ nieujemny, a licznik?

$$y_{n+1} - A_n = y_{n+1} - \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n} \geq y_{n+1} - \frac{n y_n}{n} = y_{n+1} - y_n \geq 0$$

(bo $y_1, \dots, y_{n-1} \leq y_n$, $y_{n+1} \geq y_n$).

stąd $\frac{y_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n} \geq 0 > -1$. Możemy użyć nierówności Bernoulliego.

$$A_{n+1}^{n+1} = A_n^{n+1}\left(1 + \frac{y_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}\right)^{n+1} \geq$$

$$\geq A_n^{n+1}\left(1 + \frac{y_{n+1} - A_n}{A_n}\right) = A_n^{n} \cdot y_{n+1} \underset{\text{zał. indukcyjne}}{\geq} G_n^{n} y_{n+1} =$$

$$= y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot y_{n+1} = G_{n+1}^{n+1}.$$

Stąd $A_{n+1} \geq G_{n+1}$.

A jeżeli $A_n = 0$, to $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$, a że są to liczby nieujemne, to $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, więc $G_n = G_{n+1} = 0$; $A_{n+1} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}}{n+1} = \frac{y_{n+1}}{n+1} \geq 0 = G_{n+1}$.

Zadanie 17

Wykazać, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x, y > 0$ zachodzi nierówność

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$$

Dowód indukcyjny

Dla $n=1$ $\quad (x+y)^1 \leq 2^{1-1}(x^1+y^1)$

(obie strony są równe $x+y$)

Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych x, y zachodzi $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

Chcemy wykazać, że dla dowolnych $u, v > 0$

$$\cancel{(x+y)^{n+1}}$$

$$(u+v)^{n+1} \overset{?}{\leq} 2^n(u^{n+1}+v^{n+1}) \qquad (*)$$

Możemy założyć, że $u \leq v$, wtedy $t = \frac{v}{u} \geq 1$.

Podzielmy obie strony $(*)$ przez u^{n+1}

$$(1+t)^{n+1} = \frac{(u+v)^{n+1}}{u^{n+1}} \overset{?}{\leq} 2^n \frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{u^{n+1}} = 2^n(1+t^{n+1})$$

Mamy

$$(1+t)^{n+1} = (1+t)(1+t)^n \underset{\uparrow}{\leq} (1+t)2^{n-1}(1+t^n) = 2^{n-1}(1+t+t^n+t^{n+1})$$

z zał. indukcyjnego, dla $x=1$, $y=t$

Zauważmy teraz, że gdy $t \geq 1$, to

$$t + t^n \leq 1 + t^{n+1}$$

bo ta nierówność jest równoważna

$$t - 1 \leq t^{n+1} - t^n = t^n(t-1)$$

czyli $t^n \geq 1$, a ta nierówność jest prawdziwa.

Stąd, kontynuując rachunek z poprzedniej kartki

$$(1+t)^{n+1} \leq 2^{n-1}(1+t+t^n+t^{n+1}) \leq 2^{n-1}(2\cdot(1+t^{n+1})) =$$

$$= 2^n(1+t^{n+1}).$$

Podstawiając $t = \frac{v}{u}$ i mnożąc obie strony przez u^{n+1} dostajemy tezę indukcyjną:

$$\left(1+\frac{v}{u}\right)^{n+1} \leq 2^n\left(1+\left(\frac{v}{u}\right)^{n+1}\right) \qquad /\cdot u^{n+1}$$

$$\cancel{u^{n+1}+} \quad (u+v)^{n+1} \leq 2^n(u^{n+1}+v^{n+1}).$$

Zadanie 21

Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Dowód:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

$$< \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{2n-3}}{\cancel{2n-2}}\cdot\frac{\cancel{2n-2}}{\cancel{2n-1}}\cdot\frac{\cancel{2n-1}}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{2n}$$

Stąd $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$.