Na ostatnim wykładzie przed feriami

udowodniłem: <u>tw. Fermata</u>:

Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ przyjmuje w $x_0\in(a,b)$ wartość najmniejszą lub największą (spośród wartości na (a,b)), ~~to~~ i jest w x_0 różniczkowalna, to $f'(x_0)=0$

<u>Przypomnienie</u>: wzór stycznej do wykresu f w punkcie x_0, w którym f jest różniczkowalna:

$$s(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

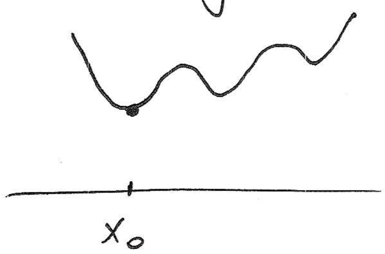
Stąd w punktach, w których $f'=0$ styczna jest pozioma: $s(x)=f(x_0)$.

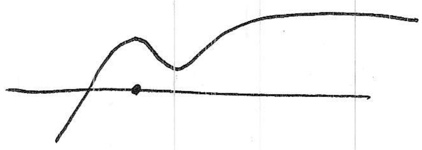
<u>Def</u>: Mówimy, że $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ma w $x_0\in(a,b)$ minimum lokalne, jeżeli istnieje $\varepsilon>0$ takie, że $f(x_0)=\min\limits_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)} f$. Analogicznie definiujemy maksimum lokalne.

Oczywiście jeżeli f ma w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to z tw. Fermata zastosowanego do $f|_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)}:(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ $f'(x_0)=0$.

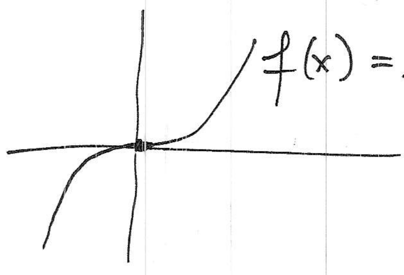
Czy jest odwrotnie? Co możemy powiedzieć o tych $x_0 \in (a,b)$, w których $f'(x_0) = 0$?

Może być tam ekstremum lokalne (albo i globalne)





ale nie musi:



$f(x) = x^3$ $\quad f'(0) = 0$.

<u>Strategia poszukiwania ekstremów:</u>

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, szukamy $\max\limits_{[a,b]} f$ i $\min\limits_{[a,b]} f$ oraz punktów, w których są osiągane.

Lista punktów podejrzanych:

(1) końce odcinka (tj a i b)

(2) punkty, w których f nie jest różniczkowalna

(3) te $x_0 \in (a,b)$, dla których $f'(x_0) = 0$.

<u>cdn</u>

<u>Dalej:</u> Udowodniliśmy ~~tw Rolle'a~~ twierdzenia o wartości średniej:

<u>Tw (Rolle)</u>
Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f(a)=f(b)$, to istnieje $\xi\in(a,b)$ t.ż. $f'(\xi)=0$.

<u>Tw. Cauchy'ego o wart. średniej</u>
Jeżeli $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe na $[a,b]$, różniczkowalne na (a,b) i dodatkowo $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x)\neq 0$, to $\exists\, \xi\in(a,b)$ t.ż.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

<u>Zagadka:</u> skąd wiemy, że $g(b)\neq g(a)$?

<u>Tw. Lagrange'a o wart. średniej</u>
Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), to istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad\left(=I_f(a,b)\right)$$

Twierdzenia o monotoniczności

1. (też już udowodnione)

Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$ i $f'(x_0)>0$, to istnieje $\varepsilon>0$ takie, że

- na prawo od x_0, w przedziale $(x_0, x+\varepsilon)$, f przyjmuje wartości większe niż $f(x_0)$
- na lewo od x_0, w przedziale $(x_0-\varepsilon, x_0)$ f przyjmuje wartości mniejsze niż x_0

Zadanie: $f(x) = x + x^2\sin\frac{1}{x}$ jest

- różniczkowalna na $\mathbb{R}$
- $f'(0)=1$
- f nie jest monotoniczna na żadnym przedziale $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

2. Twierdzenie (o pochodnych funkcji monotonicznych)

Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), to

a) f jest niemalejąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\geq 0$

b) f jest nierosnąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\leq 0$

Dowód (też chyba był, ale dla kompletności wykładu przytoczymy go). Wystarczy wykazać a), dowód b) jest analogiczny.

($\Leftarrow$)

Mamy wykazać, że $\forall_{x,y\in(a,b)} \; x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$.

Wiemy jednak, że jeżeli $x<y$, $x,y\in(a,b)$, to istnieje $\xi\in(x,y)$ tż
(tw. Lagrange'a)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)\geq 0$$

Stąd $f(y)-f(x) = (y-x)f'(\xi)\geq 0$,

więc $f(y)\geq f(x)$.

($\Rightarrow$)

Ustalmy $x\in(a,b)$. Skoro f jest różniczkowalna w x, to

$$f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{y\to x^+}\frac{\overbrace{f(y)-f(x)}^{\geq 0,\text{ bo } y>x}}{\underbrace{y-x}_{>0}}\geq 0.$$

$\square$

<u>Twierdzenie</u> (pół twierdzenia o silnej monotoniczności)

Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i $\forall_{x\in(a,b)} f'(x)>0$, to f jest rosnąca na $[a,b]$.

<u>Dowód</u>: Weźmy $x,y\in[a,b]$, $x<y$. Dla pewnego $\xi\in(x,y)$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) > 0;$$ mianownik jest dodatni,

więc licznik też musi: $f(y) > f(x)$. $\square$

Nie jest odwrotnie!

$f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, choć $f'(0) = 0$.

Istnieją (niełatwe) przykłady funkcji ~~ciągł~~ różniczkowalnych, ściśle rosnących na $\mathbb{R}$, takich, że $f'(x) = 0$ ~~$\forall x \in \mathbb{Q}$~~ dla x z gęstego podzbioru $\mathbb{R}$ (~~tej~~ da się dla $x \in \mathbb{Q}$).

<u>Twierdzenie</u> (o pochodnej funkcji ściśle monotonicznej)

Funkcja f ~~jest~~ $: [a,b] \to \mathbb{R}$, ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), jest ściśle rosnąca (malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy

① $f'(x) \geq 0$ $(\leq)$ dla wszystkich $x \in (a,b)$

oraz ② $\forall_{\substack{x,y \in [a,b] \\ x<y}} \ \exists_{\xi \in (x,y)} \ f'(\xi) > 0$ $(f'(\xi) < 0)$.

~~Wnioski~~ <u>Wniosek</u>: Funkcja f ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) jest stała na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f' \equiv 0$ na (a,b).

<u>Dowód</u> $(\Leftarrow)$ już mamy (pochodna funkcji stałej jest równa 0).

$(\Rightarrow)$. Jeżeli $f' \equiv 0$ na (a,b), to $f' \geq 0$ i $f' \leq 0$ na $(a,b) \Rightarrow f$ jest zarówno nierosnąca, jak i niemalejąca $\Rightarrow f$ jest stała na $[a,b]$.

<u>Dowód twierdzenia</u>

$(\Rightarrow)$ f jest ściśle rosnąca, wiemy więc, że $f' \geq 0$ na (a,b). Weźmy dowolne $x,y \in (a,b)$ takie, że $x<y$. Gdyby $f' \equiv 0$ na (x,y), to f byłaby stała na $[x,y]$ ↯. Stąd $\exists_{\xi \in (x,y)}$ takie, że $f'(\xi) \neq 0$, ale $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f'(\xi) > 0$.

$(\Leftarrow)$. Załóżmy, że $f' \geq 0$ na (a,b) i $\forall_{\substack{x,y \in (a,b) \\ x<y}} \exists_{\xi \in (x,y)} f'(\xi) > 0$.

Wtedy f jest niemalejąca.

Jeżeli nie jest rosnąca, to $\exists_{\substack{x,y \in (a,b) \\ x<y}}$ t.że $f(x) = f(y)$, ale wtedy $f|_{[x,y]} = \text{const} \Rightarrow f' \equiv 0$ na (x,y) ↯.

Dla funkcji malejących możemy rozważyć $-f$, która jest wtedy rosnąca, i zastosować twierdzenie do funkcji $-f$.

Dalsze wnioski z tw. Lagrange'a

Związki pochodnej z war. Lipschitza

Tw. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) spełnia na $[a,b]$ war. Lipschitza wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f'(x)|\le L$.

Dowód

($\Rightarrow$)

$$\forall_{\substack{x,y\in(a,b)\\ x\neq y}} \quad \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le\frac{L|x-y|}{|x-y|}=L.$$

Stąd
$$\forall_{x\in(a,b)} \quad |f'(x)|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \underset{\text{ciągłość } |\cdot|}{=}$$

$$=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \underset{\text{tw. o szacowaniu.}}{\le} L$$

i $\sup\limits_{(a,b)}|f'|\le L$.

($\Leftarrow$)

Niech ~~x~~ $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$. BSO możemy założyć $x<y$, z tw Lagrange'a $\exists_{\xi \in (x,y)}$ tż.

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi).$$ Stąd

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq L|x-y|.$$

$\square$

Funkcje spełniające warunek Lipschitza są szczególnym przypadkiem <u>funkcji jednostajnie ciągłych</u>

<u>Def</u>: Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ jest <u>jednostajnie</u> ciągła na A, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in A} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

(uwaga: dla f ciągłej

$\forall_{x \in A} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y \in A}$: δ może zależeć od x

dla jednost. ciągłej możemy dobrać δ do ε w sposób ~~t~~ dobry dla wszystkich $x \in A$)

Twierdzenie:

Jeżeli f spełnia na A warunek Lipschitza, (ze stałą L) to jest na A jednost. ciągła.

Dowód (w zasadzie już był – dowodziliśmy, że jest ciągła, nie zauważyliśmy, że dowiedliśmy więcej)

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$; wtedy

$$\forall_{x,y\in A} \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \underset{\text{war. } L.}{\leq} L|x-y| < L\delta = \varepsilon.$$

$\square$.

Zadanie: $\sqrt{x} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest jednost. ciągła na $[0,\infty)$, choć nie spełnia na tej półprostej warunku Lipschitza z żadną stałą L.

Więcej o funkcjach jednost. ciągłych za ok. tydzień – półtora.

2. Reguła de l'Hôpitala

Guillaume François Antoine de l'Hôpital
(de l'Hospital) 1661–1704.

Twierdzenie (reguła de l'Hôpitala, pochodzi od J. Bernoulliego)

Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne na (a,b), przy czym $\forall_{x\in(a,b)}\ g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$.

Załóżmy też, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$.

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest ona równa G.

Uwagi: 1. Dopuszczamy $a=-\infty$ i/lub $b=+\infty$

2. Twierdzenie jest sformułowane dla granic prawostronnych w a, ale jest prawdziwe (przy oczywistych zmianach w dowodzie) dla $\lim\limits_{x\to b^-}$
a także, przy ustalonym $c\in(a,b)$, dla $\lim\limits_{x\to c}$ (granica obustronna).

Modyfikacje dowodu są zupełnie oczywiste.

Dowód reguły de l'Hôpitala

Najprostszy przypadek: (a,b) jest przedziałem skończonym oraz zachodzi warunek a), b)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Funkcje f i g, określone na (a,b), możemy przedłużyć do funkcji ciągłych na $[a,b)$ kładąc

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$$

i analogicznie $g(a)=0$.

Dla dowolnego $x\in(a,b)$ mamy teraz f i g ciągłe na $[a,x]$ i różniczkowalne na (a,x); z tw. Cauchy'ego o wart. średniej istnieje $\xi_x\in(a,x)$ takie, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Jeżeli teraz $x\to a^+$, to $\xi_x \to a^+$, bo $a<\xi_x<x$, zatem

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = G. \qquad \square$$

Ale w ogólnej sytuacji jest znacznie trudniej. Dowód proszę porównać z dowodem Lematu Stolza.

Krok 1 Obserwacja: skoro $g'(x)\neq 0$ na (a,b), to g jest na (a,b) różnowartościowa (gdyby dla pewnych $x,y\in(a,b)$ $g(x)=g(y)$, to między x a y byłoby ξ t.że $g'(\xi)=0$ – tw. Rolle'a), a więc ściśle monotoniczna. Możemy założyć, że g jest rosnąca ($\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{-f(x)}{-g(x)}$, gdyby g była malejąca, to zastąpilibyśmy f i g przez $-f$ i $-g$.).

Mamy wówczas $g'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$.

Krok 2

Wybierzmy liczby $m, \tilde{m}, \tilde{M}, M$ takie, że

$$m < \tilde{m} < G < \tilde{M} < M$$

przy czym jeżeli $G = -\infty$, to nie będziemy mogli wybrać, ale też nie będziemy potrzebować m i $\tilde{m}$, i analogicznie, gdy $G = +\infty$, nie potrzebujemy M i $\tilde{M}$.

Skoro $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$, to istnieje $c \in (a,b)$ t.ż. $\forall_{x \in (a,c)} \ \tilde{m} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \tilde{M}$

Stąd dla $x \in (a,c)$

$$f'(x) - \tilde{m} g'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{M} g'(x) - f'(x) > 0$$

a zatem funkcje $f - \tilde{m} g$ oraz $\tilde{M} g - f$ są na (a,c) rosnące.

Krok 3 Jeżeli zachodzi warunek a), to

(•) skoro $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$, g rosnąca na (a,c), to $g > 0$ na (a,c)

(••) analogicznie $\lim\limits_{x \to a^+} (f - \tilde{m} g)(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to a^+} (\tilde{M} g - f)(x) = 0$,

skoro są rosnące, to $f - \tilde{m} g$ i $\tilde{M} g - f$ są dodatnie na (a,c).

$$\forall_{x \in (a,c)} \quad f(x) - \tilde{m} g(x) > 0, \ g(x) > 0 \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m}$$

$$\tilde{M} g(x) - f(x) > 0, \ g(x) > 0 \ \Rightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{M}$$

Liczby $\tilde{M}$ i $\tilde{m}$ są dowolne, byleby spełniały $\tilde{m} < G < \tilde{M}$ (np $\tilde{m} = G - \varepsilon$, $\tilde{M} = G + \varepsilon$ dla dow. $\varepsilon > 0$), więc te nierówności pociągają za sobą $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

Krok 4 Przypadek b): $\lim\limits_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$.

Wiemy, że g jest rosnąca, więc $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = -\infty$.

Wiemy też, że funkcje $f-\tilde{m}g$ oraz $\tilde{M}g-f$ są rosnące na (a,c), więc dla $x\in(a,c)$

$$f(x)-\tilde{m}g(x) < f(c)-\tilde{m}g(c)$$
$$\tilde{M}g(x)-f(x) < \tilde{M}g(c)-f(c)$$

Zmniejszając ew. c możemy zapewnić, by $g<0$ na (a,c). Stąd

$$\tilde{M}g(x)+f(c)-\tilde{M}g(c) < f(x) < \tilde{m}g(x)+f(c)-\tilde{m}g(c);$$

dzieląc przez $g(x)$ $(g(x)<0)$

$$\tilde{M}+\underbrace{\frac{f(c)-\tilde{M}g(c)}{g(x)}}_{\downarrow x\to a+ \atop 0} > \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m}+\underbrace{\frac{f(c)-\tilde{m}g(c)}{g(x)}}_{\downarrow x\to a+ \atop 0}$$

Istnieje zatem $d\in(a,c)$ takie, że

$$M > \frac{f(x)}{g(x)} > m \qquad (\text{bo } M>\tilde{M},\ m<\tilde{m})$$

i z dowolności M i m $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = G$.

(dowód autorstwa A. Birkholca).