<u>Def</u>: Niech P będzie przedziałem, $f: P \to \mathbb{R}$ ciągła. Funkcję $F: P \to \mathbb{R}$ nazywamy <u>funkcją pierwotną</u> funkcji f, jeżeli $\forall_{x \in P}$ $F'(x) = f(x)$.

<u>Uwagi</u>: Funkcja pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie! Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji f na P, to $F(x)+C$, dla dowolnej stałej C, też jest funkcją pierwotną f.
Jeżeli jednak F i G są funkcjami pierwotnymi tej samej $f: P \to \mathbb{R}$, to $F - G = \text{const}$ na P ✓
(bo $(F(x)-G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ $\forall_{x \in P}$, więc $F - G = \text{const}$).

Jeżeli jednak f nie jest określona na przedziale, to może się zdarzyć, że $\forall_{x \in A}$ $F'(x) = G'(x) = f(x)$, ale $F - G \neq \text{const}$ na A:

$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{1}{x}$ $\quad G(x) = \frac{1+|x|}{x}$

Łatwo można sprawdzić, że $G(x) - F(x) = \frac{|x|}{x} \neq \text{const}$.
Widać jednak, że A składa się z dwóch rozłącznych kawałków, które są przedziałami – i na każdym z nich $G(x) - F(x)$ jest stała (ale na różnych kawałkach A są to różne stałe).

<u>Twierdzenie</u>: Niech P będzie przedziałem; dla dowolnej funkcji ciągłej $f: P \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja pierwotna.

Dowód:

Niech ~~$w_n(x) \rightrightarrows f$~~ (w_n) będzie ciągiem wielomianów niemal jednostajnie (lub jednostajnie, gdy $P=[a,b]$) zbieżnym do f.

Ustalmy $a \in \mathrm{int} P$. Z wielomianem w_n zwiążemy nowy wielomian W_n, zdefiniowany następująco:

jeżeli $w_n(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$

to $W_n(x) = \frac{\alpha_m}{m+1}(x^{m+1} - a^{m+1}) + \frac{\alpha_{m-1}}{m}(x^m - a^m) + \ldots + \frac{\alpha_1}{2}(x^2 - a^2) + \alpha_0(x-a)$

Zauważmy, że: ① $\forall_n \; W_n(a) = 0$

② $\forall_n \; W_n'(x) = w_n'(x)$

Ciąg (W_n) spełnia zatem założenia twierdzenia o różniczkowaniu ciągu funkcyjnego: dla dowolnego przedziału domkniętego $P' \subset P$ takiego, że $a \in \mathrm{int}\, P'$ mamy

① $W_n(a)$ zbieżny

② $(W_n') = (w_n)$ jednostajnie zbieżny na P'

stąd, po pierwsze, (W_n) jednost. zbieżny na P', (do F)

po drugie, $F' = f$ na P'

~~Zauważmy jeszcze, że jeżeli P' i P'' są dwoma domkniętymi przedziałami zawartymi w P, t.ż. $a \in P' \cap P''$~~

~~to~~ Załóżmy teraz, że powtarzamy powyższą konstrukcję funkcji F dla innego przedziału domkniętego — i gdy w miejsce P' weźmiemy $\tilde{P}$, otrzymamy $\tilde{F}$.

~~Ma~~ Wtedy $P' \cap \tilde{P}$ jest przedziałem, $a \in \mathrm{int}\, P' \cap \tilde{P}$;

$(F - \tilde{F})' = f - f = 0$ na $P' \cap \tilde{P} \Rightarrow F - \tilde{F} = C = \mathrm{const}$ na $P' \cap \tilde{P}$

ale $F(a) - \tilde{F}(a) = 0 \Rightarrow C = 0$, więc F i $\tilde{F}$ pokrywają się na $P' \cap \tilde{P}$.

Jeżeli teraz wypełnimy P przedziałami domkniętymi tak, jak we ~~tw.~~ wzmocnieniu tw. Weierstrassa ($P=(a,b)$, to bierzemy $a_n \searrow a$, $b_n \nearrow b$ i przedziały $[a_n, b_n]$), widzimy, że w ten sposób jednoznacznie definiujemy F na całym P.

Oznaczenie

Funkcję pierwotną funkcji $f: P \to \mathbb{R}$ oznaczać będziemy

$$\int f(x)\,dx$$ i nazywać całką nieoznaczoną funkcji f

To oznaczenie ma sens z dokładnością do stałej. Wiemy, że

$$\int 0\,dx = C \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

o ile $a \neq -1$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \ln x\,dx = ? \qquad \int \tan x\,dx = ? \qquad \int \operatorname{ctg} x\,dx = ?$$

Oczywiście z własności pochodnej wiemy od razu, że całka nieoznaczona jest, jak pochodna, operacją liniową:

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g: P \to \mathbb{R}$, to

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

(bo pochodne obu stron równania są równe).

Przy liczeniu pochodnych pomocne nam były 2 wzory pozwalające sprowadzać różniczkowanie złożonych wyrażeń do różniczkowania ich części składowych: wzór Leibniza na pochodną iloczynu i wzór na pochodną złożenia funkcji.

Oba mają ważne skutki dla całkowania:

① wzór na całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)$$

Dowód: różniczkujemy stronami:

$$f'(x)g(x) = \left(f(x)g(x)\right)' - f(x)g'(x) \longleftarrow \text{wzór Leibniza}$$

Zastosowanie

$$\int \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx =$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int x e^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

② wzór na całkowanie przez podstawianie

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C, \quad \text{gdzie } F(t) = \int f(t)\,dt$$

Dowód – jak w ①.

W praktyce ten wzór stosuje się następująco:

Widząc $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ „podstawiamy" za $g(x)$ nową zmienną, np. t; oznaczając $g'(x)dx$ symbolem dt

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+C$$

mnemotechnika: jeżeli $t=g(x)$, to $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{dt}{dx}$ „$\Rightarrow$” $dt = \ldots$

i tu „przypominam sobie”, że $t=g(x)$, podstawiając $g(x)$ w miejsce t.

Przykład:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \underbrace{\left(-\frac{1}{\cos x}\right)}_{= f(\cos x)} \underbrace{(-\sin x)}_{= (\cos x)'}\,dx =$$

gdzie $f(t) = -\frac{1}{t}$

$t=\cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Jak doskonale Państwo wiedzą, wielomiany (o współczynnikach całkowitych, wymiernych, rzeczywistych czy zespolonych) ~~nazywa~~ to funkcje postaci

$W: \; x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \boxed{\text{dla } n>0 \; a_n \neq 0.}$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ nazywamy stopniem wielomianu W, (ozn. $\deg W$), $a_0, a_1, \dots, a_n$ to ustalone liczby (odp. z $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ czy $\mathbb{C}$). Nas interesować będą przede wszystkim wielomiany o współczynnikach rzeczywistych.

Własności stopnia: $\deg(V \cdot W) = \deg V + \deg W$

$\deg(V \pm W) \leq \max(\deg V, \deg W)$

Umowa: wielomian zerowy ma stopień $-\infty$ (ta umowa jest spójna z powyższymi własnościami.

Jak dotąd udowodniliśmy jedno poważne twierdzenie o wielomianach:

Zasadnicze tw. algebry: Każdy wielomian dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony

i Wniosek (tw. o rozkładzie): Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić jako iloczyn ~~składników~~ czynników stopnia 1 i (nierozkładalnych) czynników stopnia 2, przy czym rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności, i ~~ozike~~ mnożenia czynników przez stałe

(z tym ostatnim kłopotem radzimy sobie wprowadzając pojęcie wielomianów unormowanych, tj. takich,

dla których wsp. przy najwyższej potędze x jest $=1$.
Każdy wielomian unormowany o wsp. rzeczywistych można jednoznacznie z dokładnością do kolejności przedstawić jako iloczyn ~~czynni~~ unormowanych wielomianów stopnia 1 i 2 (przy czym te stopnia 2 nie dają się dalej rozłożyć).

W rzeczywistości ten wniosek wymagał nieudowodnionej przez nas wersji tw. Bezout:
Jeżeli $W(x_0)=0$, to istnieje wielomian P taki, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ W(x)=(x-x_0)P(x)$.

Dowód: Rozwińmy W w szereg Taylora wokół x_0.
Oczywiście dla $m>\deg W$ mamy $W^{(m)}\equiv 0$, więc (jak już kiedyś wykazaliśmy)

$$W(x)=\sum_{m=0}^{\deg W}\frac{W^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m=\sum_{m=1}^{\deg W}\frac{W^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m=$$

$$=(x-x_0)\underbrace{\sum_{m=1}^{\deg W}\frac{W^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^{m-1}}_{P(x)}\qquad\square.$$

Potrzebne nam teraz będzie

Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą
Dla dowolnych wielomianów w i v o współczynnikach rzeczywistych, jeżeli $v\not\equiv 0$, to istnieje dokładnie jedna para wielomianów q i r (o wsp. rzeczywistych) taka, że

$$w=qv+r\quad\text{i}\quad\deg r<\deg v.$$

Dowód

① Istnienie q i r:

Jeżeli $\deg w < \deg v$, to bierzemy $q \equiv 0$, $r = w$.
Załóżmy zatem, że $\deg w \geqslant \deg v$

$$w(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$v(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \qquad b_n \neq 0,\ m \geqslant n.$$

i załóżmy, że twierdzenie o dzieleniu z resztą zachodzi dla dowolnego $\tilde{w}$, stopnia mniejszego niż $\deg w$, w miejsce wielomianu w.
(co z początkiem indukcji?)

Weźmy teraz $\tilde{w}(x) = w(x) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} v(x)$.
$\deg \tilde{w} < \deg w$, więc istnieją $\tilde{q}, \tilde{r}$ takie, że

$$\forall_x \quad \tilde{w}(x) = \tilde{q}(x) v(x) + \tilde{r}(x) \qquad \underline{\deg \tilde{r} < \deg v}$$

a więc $\quad w(x) = \tilde{w}(x) + \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} v(x) =$

$$= \underbrace{\left[\tilde{q}(x) + \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}\right]}_{q(x)} v(x) + \underbrace{\tilde{r}(x)}_{r(x)}$$

i stąd $\deg r < \deg v$.

② Jednoznaczność

Załóżmy, że wielomian W można przedstawić na 2 różne sposoby

$$\forall_x \quad w(x) = q(x) v(x) + r(x) = \tilde{q}(x) v(x) + \tilde{r}(x)$$

Stąd $\quad (q - \tilde{q}) v = \tilde{r} - r$

$$\deg(q - \tilde{q}) + \deg v = \deg(q - \tilde{q}) v = \deg(\tilde{r} - r) \leqslant \max(\deg \tilde{r}, \deg r) < \deg v.$$

Mamy więc $\deg(q-\tilde{q}) < 0$, a więc $q-\tilde{q} \equiv 0$, $\Rightarrow q \equiv \tilde{q}$.
co pociąga za sobą $r \equiv \tilde{r}$.

jak zwykle o wsp. rzeczywistych

<u>Def</u>: Dwa wielomiany (w, v) stopnia ≥ 0 są względnie pierwsze, jeżeli nie istnieje wielomian p stopnia > 0 będący równocześnie dzielnikiem w i dzielnikiem v.
Ozn.: $w \perp v$

<u>Lemat</u>: Jeżeli $w \perp v$, to istnieją wielomiany p, q takie, że $\forall_x \; p(x)w(x) + q(x)v(x) = 1$.

<u>Dowód</u>:

Rozważmy zbiór A wszystkich wielomianów unormowanych postaci $pw+qv$. Ich stopnie tworzą podzbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$, więc istnieją w A wielomiany unormowane najniższego stopnia. Niech d będzie takim wielomianem
$$\forall_x \quad d(x) = p_0(x)w(x) + q_0(x)v(x).$$

Wykażemy, że d jest dzielnikiem zarówno w, jak i v:
Załóżmy bowiem, że $d \nmid w$ i podzielmy w przez d z resztą:

$w = \tilde{q}d + r = \tilde{q}(p_0 w + q_0 v) + r$, skąd
$r = [1 - \tilde{q}p_0]w - \tilde{q}q_0 v$, a więc jeżeli $r \not\equiv 0$, to $r \in A$.
Z drugiej strony $\deg r < \deg d$, więc po podzieleniu r przez współczynnik przy najw. potędze x możemy otrzymać w A wielomian unormowany stopnia mniejszego niż $\deg d$ $\lightning$.

Analogicznie dowodzimy, że $d \mid v$. Wiemy jednak, że $w \perp v$, a więc $\deg d = 0$ (d jest unormowany, nie może więc być $\equiv 0$) $\Rightarrow d \equiv 1$.

<u>Twierdzenie</u> Dowolną funkcję wymierną $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P \perp Q$, można przedstawić jako skończoną sumę wielomianu i ułamków prostych, tj funkcji wymiernych postaci $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $\frac{Bx+C}{(x^2-px+q)^\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$.

<u>Dowód - konstrukcja</u>

<u>Krok 1</u>

Jeżeli $\deg P > \deg Q$, to dzielimy P przez Q (z resztą):

$$P = \tilde{P} Q + R, \quad \deg R < \deg Q$$

więc $\forall_x \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\tilde{P}(x)}_{\text{wielomian}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{funkcja wymierna, } \deg R < \deg Q.}$

Możemy zatem zakładać, że $\deg P \leq \deg Q$.

<u>Krok 2</u> Możemy zakładać, że Q jest unormowany.

Rozkładamy Q na czynniki stopnia 1 i 2

$$Q(x) = (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{k_m}(x^2-p_0x+q_0)^{\ell_0} \cdot \ldots \cdot (x^2-p_nx+q_n)^{\ell_n}$$
$$= (x-x_0)^{k_0}\tilde{Q}(x)$$

(zakładamy, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $k_i \geq 1$).

Zauważmy, że $(x-x_0)^{k_0} \perp \tilde{Q}(x)$

(jedyne dzielniki stopnia >0 wielomianu $(x-x_0)^{k_0}$ są postaci $(x-x_0)^j$, gdyby $(x-x_0)^j \mid \tilde{Q}(x)$, to byłoby $\tilde{Q}(x_0) = 0$, a tak nie jest).

Istnieją zatem wielomiany F i G takie, że

$$(x-x_0)^{k_0}F(x) + \tilde{Q}(x)G(x) = 1.$$

Stąd

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot\left[(x-x_0)^{k_0}F(x)+\tilde{Q}(x)G(x)\right]}{(x-x_0)^{k_0}\tilde{Q}(x)} =$$

$$= \underbrace{\frac{P(x)F(x)}{\tilde{Q}(x)}} + \underbrace{\frac{P(x)G(x)}{(x-x_0)^{k_0}}}$$

jeżeli stopień licznika > stopień mianownika (tj. k_0) to dzielimy z resztą, wydzielając wielomian.

„Oderwaliśmy" od mianownika czynnik $(x-x_0)^{k_0}$.
Analogicznie „odrywamy" pozostałe $(x_i-x_i)^{k_i}$ oraz $(x^2-p_ix+q_i)^{l_i}$. ~~Do~~ Otrzymujemy przedstawienie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jako sumy wielomianu oraz funkcji wymiernych postaci $\frac{F(x)}{(x-x_0)^k}$ oraz $\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l}$, $\deg F \le k$, $\deg G \le 2l$

Podzielmy F z resztą przez $(x-x_0)^{\deg F}$:

$$F(x) = \underbrace{\tilde{F}(x)}_{\substack{\text{stopnia } 0 \\ \text{więc const.} \\ = A}}(x-x_0)^{\deg F} + R(x), \quad \frac{F(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{A}{(x-x_0)^{k-\deg F}} + \frac{R(x)}{(x-x_0)^k}$$

i $\deg R < \deg F$

Iterując tę procedurę, przedstawiamy $\frac{F(x)}{(x-x_0)^k}$ jako sumę funkcji postaci $\frac{A_i}{(x-x_0)^{i}}$, $i \le k$.

Podobnie postępujemy z $\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l}$:

Jeżeli $\deg G \le 1$, to $G = Ax+B$, $\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l} = \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^l}$

Jeżeli $\deg G \ge 2$, to dzielimy G z resztą przez $(x^2-px+q)^{\lfloor \frac{\deg G}{2} \rfloor}$

$$G(x) = \tilde{G}(x)\,(x^2-px+q)^{\lfloor \frac{\deg G}{2}\rfloor} + S(x), \quad \deg\tilde{G} \le 1, \quad \deg S < 2\left\lfloor \frac{\deg G}{2}\right\rfloor \le \deg G.$$

$\deg \tilde{G} \leq 1 \Rightarrow \tilde{G}(x) = Ax+B$

$$\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l} = \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^{l-\lfloor\frac{\deg G}{2}\rfloor}} + \frac{S(x)}{(x^2-px+q)^l} \qquad \deg S < \deg G.$$

Iterując otrzymujemy przedstawienie $\frac{G(x)}{(x^2-px+q)^l}$ jako sumy wyrażeń postaci $\frac{A_i x + B_i}{(x^2-px+q)^{l_i}}$ $\quad l_i \leq l$.

~~W zasadzie~~ To daje teraz twierdzenie □.

„Twierdzenie": Umiemy scałkować każdą funkcję wymierną.

„Dowód": Badaną przez nas funkcję $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ możemy przedstawić jako sumę

1. wielomianu
2. wyrażeń postaci $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $k \in \mathbb{N}$
3. wyrażeń postaci $\frac{Bx+C}{(x^2-px+q)^l}$ $\quad l \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$.

~~Ale~~ Z całkowaniem wielomianu nie ma problemu, trzeba natomiast zastanowić się, jak całkować wyrażenia (2) i (3).

(2): $k=1$ $\qquad \int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A \ln|x-x_0| + C$

$$k>1 \qquad \int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx \underset{\substack{y=x-x_0\\ dy=dx}}{=} A\int y^{-k}\,dy = A\frac{y^{1-k}}{1-k} + C = \frac{A}{1-k}(x-x_0)^{1-k} + C$$

(2)

$k=1$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2-px+q}\,dx = \int \frac{B\left(x-\frac{p}{2}\right)}{x^2-px+q}\,dx + \int \frac{\frac{Bp}{2}+C}{x^2-px+q}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x-p}{x^2-px+q}\,dx + \left(\frac{Bp}{2}+C\right)\int \frac{dx}{x^2-px+q}$$

Każdą z tych całek potraktujemy inaczej:

$$\int \frac{2x-p}{x^2-px+q}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln\left(x^2-px+q\right) + C$$

$y = x^2-px+q$

$dy = 2x-p$

moduł niepotrzebny, bo x^2-px+q nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc jest $\forall_{x\in R}$ dodatnie.

$$\int \frac{dx}{x^2-px+q} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{4q-p^2}{4}}_{>0}} =$$

$$= \frac{4}{4q-p^2}\int \frac{dx}{\frac{4}{4q-p^2}\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{4q-p^2}\int \frac{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\,dy}{y^2+1} =$$

$y = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x-\frac{p}{2}\right)$

$dy = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,dx$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,y + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x-\frac{p}{2}\right)\right) + C.$$

$\underline{k>1}$:

~~Oznaczmy przez I_n całkę $\int$~~

Jak w przypadku $k=1$ zamieniamy x^2-px+q na x^2+1 :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2-px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x-p)\,dx}{(x^2-px+q)^k} + \int \frac{\left(\frac{Ap}{2}+B\right)dx}{(x^2-px+q)^k} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{dy}{y^k} + \left(\frac{Ap}{2}+B\right)\int \frac{dx}{(x^2-px+q)^k}$$

$y = x^2-px+q$
$dy = (2x-p)\,dx$

$$\frac{A}{2}\int \frac{dy}{y^k} = \frac{A}{2}\,\frac{y^{1-k}}{1-k} = \frac{A}{2}\,\frac{(x^2-px+q)^{1-k}}{1-k}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^k} = \cancel{\left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^k \int \frac{dx}{(x-\frac{p}{2})}}$$

$$= \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^k \int \frac{dx}{\left(\frac{4}{4q-p^2}\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+1\right)^k} =$$

$y = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x-\frac{p}{2}\right)$

$dy = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\,dy$

$$= \left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^{k-\frac{1}{2}} \int \frac{dy}{(y^2+1)^k}$$

Pozostaje wyznaczyć $\int \frac{dy}{(y^2+1)^k}$.

Niech wyznaczone, oczywiście, z dokł. do stałej.

$$I_k = \int \frac{dy}{(y^2+1)^k} = \int \frac{(y)'\,dy}{(y^2+1)^k} \underset{\text{przez części}}{=} \frac{y}{(y^2+1)^k} - \int y\cdot\left(\frac{1}{(y^2+1)^k}\right)' dy =$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} - \int y\cdot(-n)\cdot\frac{2y}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2n\int\frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy =$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2n\int\frac{y^2+1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy - 2n\int\frac{dy}{(y^2+1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2n\,I_k - 2n\,I_{k+1}$$

stąd

$$I_{k+1} = \frac{y}{2n(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}\,I_k$$

$$I_1 = \int\frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg} y + C$$

$$I_2 = \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} y + C$$

$$I_3 = \frac{y}{4(y^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2 = \ldots$$

itd.