Szeregi potęgowe

Szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy szeregiem potęgowym wokół x_0, o współczynnikach a_n ($a_n \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$).

Przykłady:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a$ dla $x \in (-1,1)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$ dla $x \in (-1,1]$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1,1)$

Twierdzenie: Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny dla pewnego $\tilde{x} \neq x_0$. Wówczas ~~szereg ten~~ dla dowolnego $\varrho < |\tilde{x}-x_0|$ szereg ten jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w $\{x : |x-x_0| \leq \varrho\}$ (gdy rozpatrujemy $x \in \mathbb{R}$, jest to odcinek o długości 2ϱ i środku w x_0; gdy $x \in \mathbb{C}$, jest to koło domknięte o promieniu ϱ i środku w x_0).

Dowód:

Niech x: $|x-x_0| \leq \varrho$. Wówczas $\sum_{n=0}^{\infty}$

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|\varrho^n \leq |a_n(\tilde{x}-x_0)^n| \cdot \left(\frac{\varrho}{|\tilde{x}-x_0|}\right)^n$$

zauważmy, że skoro $\sum a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ jest zbieżny, to ciąg $a_n(\tilde{x}-x_0)^n \to 0$, jest więc ograniczony: $\forall_n |a_n(\tilde{x}-x_0)^n| < M$.

wtedy $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n(\tilde{x}-x_0)^n| \cdot \left(\frac{\varrho}{|\tilde{x}-x_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{\varrho}{|\tilde{x}-x_0|}\right)^n$

szereg $M\left(\frac{\varrho}{|\tilde{x}-x_0|}\right)^n$ jest zbieżny (jako geometryczny), więc z kryt. Weierstrassa

$\sum a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie $\square$

Wnioski:

1. Jeżeli $\sum a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ jest rozbieżny, ~~dla~~ ~~to~~ $\forall_\xi$ i ~~ξ~~: $|\xi - x_0| > |\tilde{x}-x_0|$ to $\sum a_n(\xi-x_0)^n$ też jest rozbieżny.

Dowód: gdyby $\sum a_n(\xi-x_0)^n$ był zbieżny, to z twierdzenia wynikałoby, że również $\sum a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ jest zbieżny $\lightning$.

2. Zbiór punktów, w którym szereg potęgowy jest zbieżny jest

albo punktem x_0

albo całym $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)

albo ~~kołem~~ szereg jest zbieżny wewnątrz pewnego koła o środku w x_0 i promieniu R i rozbieżny poza tym kołem; co dzieje się na brzegu tego koła, na razie nie wiemy.

Def: Promień R nazywamy promieniem zbieżności szeregu $\sum a_n(x-x_0)^n$; jeżeli szereg ten jest zbieżny jedynie w x_0, przyjmujemy $R=0$, a jeżeli jest zbieżny w całym $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$), to $R=\infty$.

<u>Przykłady</u>:

1. szereg $\sum n^n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x=0$ (~~[illegible]~~ dla $x \neq x_0$ nie spełnia podstawowego kryterium zbieżności), więc ma promień zbieżn. równy 0.

2. $\sum \frac{x^n}{n!}$ ma promień zbieżności ∞

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ma promień zbieżności 1 (dlaczego? do czego ten szereg jest zbieżny?)

<u>Def</u>: Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Zbiór wszystkich granic zbieżnych podciągów ciągu (a_n) nazywamy <u>zbiorem granic częściowych</u>, lub <u>zbiorem ω-granicznym</u> ciągu (a_n), ozn. $\omega(a_n)$

<u>Przykłady</u>: zbiór granic częściowych ciągu zbieżnego składa się jedynie z granicy; jeżeli (a_n) jest rozbieżny do $\pm\infty$, to również zbiór ω-graniczny złożony jest jedynie z $+\infty$ lub $-\infty$.
Jeżeli (a_n) nie ma granicy, to jego zbiór ω-graniczny jest co najmniej dwupunktowy;

$$\omega\left((-1)^n\right) = \{-1, 1\}.$$

<u>Zadanie</u>: $\omega(\sin n) = ?$

~~Definicja:~~

<u>Zadanie</u>: Dla dowolnego ciągu (a_n) zbiór granic częściowych jest domknięty.

<u>Def.</u> Supremum zbioru granic częściowych nazywamy <u>granicą górną</u> ciągu (a_n) i oznaczamy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Analogicznie infimum tego zbioru nazywamy <u>granicą dolną</u> ciągu (a_n) i oznaczamy $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Inna charakteryzacja granic górnej i dolnej:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \cancel{\lim_{n\to\infty}\sup}\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m>n} a_m$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m>n} a_m$$

Łatwo można zauważyć, że ciąg $(\sup\limits_{m>n} a_m)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, więc jego kres dolny jest równy jego granicy. Stąd

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} a_m$$

Analogicznie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m>n} a_m$$

Równoważność tych dwóch definicji zostawiam Państwu jako zadanie.

Wzór Cauchy-Hadamarda

Niech $\mu = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest równy

a) 0 gdy $\mu = +\infty$

b) $+\infty$ gdy $\mu = 0$

c) $\frac{1}{\mu}$ gdy $0 < \mu < \infty$.

Jacques Hadamard (1865-1963)

Dowód

a) Ustalmy $x \neq x_0$ (dowolne). Skoro $\mu = +\infty$, to znajdziemy podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) taki, że
$$\forall_k \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{2}{|x-x_0|} \Rightarrow |a_{n_k}||x-x_0|^{n_k} > 2^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$
a więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ nie spełnia podstawowego kryterium zbieżności (podciąg wyrazów szeregu nie dąży do 0).

b) Jak poprzednio, niech $x \neq x_0$. Skoro $\mu = 0$, to dla dost. dużych n
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x-x_0|}$$
$$\Downarrow$$
$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{1}{2^n}$$
i ze zbieżności $\sum \frac{1}{2^n}$ wynika (bezwzględna) zbieżność $\sum a_n (x-x_0)^n$.

c) Załóżmy, że $|x-x_0| < \frac{1}{\mu}$; znajdziemy wówczas $\varrho \in \left(|x-x_0|, \frac{1}{\mu}\right)$. Skoro $\frac{1}{\varrho} > \mu$, to dla dużych n
$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\varrho}, \text{ a więc } |a_n||x-x_0|^n < \left(\frac{|x-x_0|}{\varrho}\right)^n, \text{ ale}$$
$\frac{|x-x_0|}{\varrho} < 1$, więc szereg $\sum \left(\frac{|x-x_0|}{\varrho}\right)^n$ jest zbieżny, więc $\sum a_n (x-x_0)^n$ jest (bezwzględnie) zbieżny.

Jeżeli zaś $|x-x_0| > \frac{1}{k}$, to znajdziemy podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) t.ż. $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x-x_0|}$, więc $|a_{n_k}(x-x_0)^{n_k}| > 1$, a zatem $a_n(x-x_0)^n \not\to 0$, co dowodzi rozbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. □

~~Śledząc dowód możemy zauważyć, że zachodzi następujące twierdzenie~~

Całe to rozumowanie bez zmian przenosi się na szeregi potęgowe zmiennych zespolonych: Możemy obliczyć $k = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i wyznaczyć R zgodnie z wzorem Cauchy-Hadamarda. Wiemy wówczas, że szereg $\sum a_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny (i to bezwzględnie) wewnątrz koła o środku w z_0 i promieniu R, rozbieżny poza domkniętym kołem — a zachowanie szeregu na brzegu koła, a więc na okręgu o środku w z_0 i promieniu R, wymaga staranniejszego zbadania.

Ustalmy teraz dowolne $\varrho \in (0,R)$. Zauważmy, że w przedziale $[x_0-\varrho, x_0+\varrho]$ (ew. w domkniętym kole o środku w x_0 i promieniu ϱ) szereg $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie. Wystarczy powtórzyć argument z punktu c) poprzedniego dowodu; ~~weźmy $\sigma \in (\varrho, R)$, wtedy $\sum a_n \sigma^n$ jest bezwzględnie zbieżny; $\forall_{x\in[x_0-\varrho, x_0+\varrho]}$ $|x-x_0| \le \varrho < \sigma$, więc $|x-$~~

Skoro $\varrho \in (0,R)$, to $\sum a_n \varrho^n$ jest bezwzględnie zbieżny (bo $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest bezwzgl. zbieżny dla $x = x_0+\varrho$); $\forall_{x\in[x_0-\varrho, x_0+\varrho]}$ $|a_n(x-x_0)^n| \le |a_n \varrho^n|$, a więc z kryterium porównawczego $\sum a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny bezwzględnie w x, a z kryt. Weierstrassa – zbieżny jednostajnie w $[x_0-\varrho, x_0+\varrho]$.

<u>Wniosek</u>: Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Suma tego szeregu jest funkcją ciągłą w przedziale (x_0-R, x_0+R).

<u>Dowód</u>: Wyrazy szeregu są wielomianami – więc są ciągłe; dla każdego $x \in (x_0-R, x_0+R)$ znajdę $\varrho \in (0,R)$ takie, że $x \in [x_0-\varrho, x_0+\varrho]$, a w tym ostatnim przedziale szereg jest jednostajnie zbieżny. ▷

Mamy w ten sposób nowy dowód tego, że funkcje exp, sin, cos są ciągłe na $\mathbb{R}$. Ale np $\ln(1+x)$ – tylko na $(-1,1)$ (choć, jak łatwo sprawdzić, gdy wiemy, że $\ln(1+x)$ jest ciągły w 0, to umiemy wykazać jego ciągłość w dowolnym $x \in (-1,+\infty)$).

A co w końcach przedziału zbieżności (w punktach $x_0 \pm R$)? Wiemy, że ze zbieżnością $\sum a_n (x-x_0)^n$ może w tych punktach być różnie – ale jeżeli wiemy, że szereg jest np. zbieżny w x_0+R, to czy jego suma jest ciągła w x_0+R?

<u>Twierdzenie Abela (wersja rzeczywista)</u>
Załóżmy, że szereg $\sum a_n (x-x_0)^n$ ma promień zbieżności R i że jest zbieżny w $x = x_0+R$. } analogicznie dla $x = x_0-R$
Wówczas funkcja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest ciągła w $x_0 \pm R$, tj
$$\lim_{x \to x_0+R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Dowód: Wykażemy, że szereg $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[x_0, x_0+R]$. Wynika to wprost z kryterium Abela zbieżności jednostajnej (s.247)

Niech $g_n(x) = a_n R^n$, $f_n(x) = \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$.

Funkcje f_n są nieujemne, ograniczone (przez 1), $\forall_{x\in[x_0,x_0+R]}$ $f_n(x)$ jest nierosnący, a szereg $\sum g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny, bo $g_n(x)$ w ogóle nie zależy od x. Stąd $\sum f_n(x)g_n(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ jest na $[x_0, x_0+R]$ jednostajnie zbieżny, a więc suma ~~f~~ tego szeregu jest ciągła na $[x_0, x_0+R]$.

Dla x_0-R kładziemy $g_n(x) = a_n(-R)^n$, $f_n(x) = \left(\frac{x_0-x}{R}\right)^n$.

<u>Wniosek z dowodu:</u> Na dowolnym przedziale domkniętym $[a,b]$ zawartym w przedziale zbieżności szeregu $\sum a_n(x-x_0)^n$ szereg ten jest zbieżny jednostajnie, a więc jego suma jest na $[a,b]$ (jednostajnie) ciągła).

<u>Twierdzenie</u> (o różniczkowaniu szeregu potęgowego wyraz po wyrazie).

Niech funkcja $F(x)$ będzie dana szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności R:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{dla } x\in(x_0-R, x_0+R).$$

Wówczas F jest różniczkowalna w (x_0-R, x_0+R) i zachodzi wzór

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{dla } x\in(x_0-R, x_0+R).$$

Dowód: Zaczniemy od wykazania, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ jest taki sam, jak szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Rzeczywiście, z wzoru Cauchy-Hadamarda:

$\cancel{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq}$

Załóżmy, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mu \neq +\infty$.

Jeżeli $\mu = 0$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

(bo podciągi ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$, jeżeli są zbieżne, to mają granicę ≥ 0, a limsup to sup zbioru granic $\Rightarrow$ wszystkie podciągi dążą do 0 $\Rightarrow$ ciąg dąży do 0.)

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{(n+1)}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{ograniczone przez 1 dla dost. dużych } n} \longrightarrow 0.$$

Jeżeli $\mu \neq 0$, to trochę więcej roboty:

Zaczniemy od wykazania, że $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mu$.

Mamy bowiem dla dost. dużych n

$$\sqrt[n-1]{n|a_n|} = \sqrt[n-1]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{|a_n|}\ (\mu+1)^{\frac{1}{n+1}}$$

i jeżeli teraz (a_{n_k}) jest podciągiem takim, że $\sqrt[n_k-1]{n_k|a_{n_k}|}$ jest zbieżny, to ~~jego to granica jest nie większa niż~~ $\cancel{\lim_{k\to\infty}}$ do g, to

$\cancel{\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k-1]{n_k|a_{n_k}|} \leq \sqrt[n_k-1]{\ }}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k-1]{n_k|a_{n_k}|} \leq \sqrt[n_k-1]{n_k}\ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\ (\mu+1)^{\frac{1}{n_k+1}} \longrightarrow g$$

$\wedge$

$$\sqrt[n_k-1]{n_k}\ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\ \left(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right)^{\frac{1}{n_k-1}} \longrightarrow g$$, więc

zbiór granic częściowych $\sqrt[n]{|a_n|}$ zawiera się w zb. gr. cz. $\sqrt[n-1]{n|a_n|}$

A jeżeli 181

$$\sqrt[m_k-1]{m_k|a_{m_k}|} \longrightarrow h, \text{ to } \forall_{\varepsilon} \exists_{k_0} \forall_{k>k_0}$$

$$\sqrt[m_k-1]{m_k|a_{m_k}|} = \sqrt[m_k]{|a_{m_k}|} \cdot \sqrt[m_k-1]{m_k} \left(\cdot \sqrt[m_k(m_k-1)]{|a_{m_k}|}\right)^{\frac{1}{m_k-1}} \leq$$

$$\leq (\mu+\varepsilon)\sqrt[m_k-1]{m_k} \cdot (\mu+\varepsilon)^{\frac{1}{m_k-1}}$$

stąd $\Big\downarrow_{k\to\infty}$

$\forall_{\varepsilon>0} \quad h \leq \mu+\varepsilon \Rightarrow h\leq\mu$, więc sup(zb. gr. częśc. $\sqrt[n-1]{n|a_n|}$) $\leq$ sup(— " — $\sqrt[n]{|a_n|}$).

stąd $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_{n}|} = \mu.$

Dalej prosto: wiemy, że $\sum a_n(x-x_0)^{n+1}$ jest ~~[illegible]~~ zbieżny dla $x=x_0$, $\sum_{(n=1)} na_n(x-x_0)^{n-1}$ jest ~~je~~ niemal ~~[illegible]~~ jedn. zbieżny w ~~[illegible]~~ $(x_0-R, x_0+R) \Rightarrow$

$$F \text{ jest różn. i } F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$\square$

A co na końcach?

Oczywiście jeżeli $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w x_0+R i $\sum na_n(x-x_0)^{n-1}$ też, to $\sum na_n(x-x_0)^{n-1}$ jest zbieżny jednost. na $[x_0, x_0+R] \Rightarrow$

~~$F'(x)$~~ $F'(x)$ jest ciągła w x_0+R i

$$F_-'(x_0+R) = \lim_{x\to x_0+R} F'(x) = \sum na_nR^n.$$

~~Ale może~~ się

~~Uwaga:~~

Twierdzenie można dalej stosować do pochodnej, itd $\Rightarrow$

(1) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest ∞ - wiele razy różniczk. wewnątrz przedziału zbieżności, i z jej w szczególności $\forall_k$ $F^{(k)}$ jest ciągła w (x_0-R, x_0+R).

(2) Jeżeli dwa szer. potęgowe o dod. prom. zbieżności, są wokół tego samego punktu x_0, są równe w pewnym otoczeniu x_0, to mają równe współczynniki.

~~Mamy bowiem~~ Niech bowiem

$$F(x) = \sum a_n (x-x_0)^n = \sum b_n (x-x_0)^n \text{ w } \cancel{ot}$$

dla $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$$a_0 = F(0) = b_0$$

$a_0 = F(0)$

$a_1 = F'(0)$

$$F'(x) = \sum n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum n b_n (x-x_0)^{n-1}$$

i $$F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

czyli $$F^{(k)}(x_0) = \frac{k!}{0!} k! a_k$$

więc $$a_k = \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}$$ jest jednozn. wyznaczone

Wniosek:

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, to $a_n = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}$

i ten szereg potęgowy jest szeregiem Taylora funkcji F wokół x_0

Przykład.

Niech $f(x) = \sqrt{1+x}$. Wiemy (wzór dwumianowy), że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ dla $x \in (-1,1)$.

Zauważmy, że

1. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ jest zbieżny dla $x=-1$ (i to bezwzględnie): dla $n>1$:

$$\left|\binom{1/2}{n}\cdot(-1)^n\right| = \left|\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)\cdot\ldots\cdot(\frac12-n+1)}{n!}\cdot(-1)^n\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2n}\,\frac{(1-\frac12)}{1}\cdot\frac{(2-\frac12)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1-\frac12)}{n-1}\right| = \frac{1}{2n}(1-\tfrac12)(1-\tfrac14)(1-\tfrac16)\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{1}{2(n-1)})$$

$$\le \frac{1}{2n} e^{-1/2} e^{-1/4}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{1}{2(n-1)}} = \frac{1}{2n} e^{-\frac12\underbrace{(1+\frac12+\ldots+\frac{1}{n-1})}_{>\ln(n-1)}} < \frac{1}{2n} e^{-\frac12\ln(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2n\sqrt{n-1}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n-1}} < \infty.$$

<u>Zagadka</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n = ?$

Skoro szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ jest zbieżny w $x=-1$, to z tw. Abela jest zbieżny jednostajnie w $[-1,0]$.

A szereg pochodnych?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{1/2}{n}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\binom{1/2}{n}\cdot x^n.$$

Pozostawię Państwu dowód, że ten ostatni szereg jest, dla $x=-1$, rozbieżny. Należy się tego spodziewać, bo funkcja f jest wprawdzie w $x=-1$ ciągła, ale nie ma w tym punkcie skończonej (prawostronnej) pochodnej.

<u>Twierdzenie</u>: Niech funkcja $f:(x_0-R, x_0+R)\to\mathbb{R}$ będzie dana szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności R:
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad x\in(x_0-R, x_0+R).$$

Dla dowolnego $y_0\in(x_0-R, x_0+R)$ znajdziemy szereg potęgowy $\sum b_n (y-y_0)^n$, o promieniu zbieżności co najmniej $R_1=\min(x_0+R-y_0,\ y_0-x_0+R)\overset{}{=}R-|y_0-x_0|$, taki, że dla $y\in(y_0-R_1, y_0+R_1)$ $\quad f(y)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-y_0)^n$

(a więc funkcję f można rozwinąć w szereg potęgowy w dowolnym punkcie leżącym wewnątrz przedziału zbieżności).

Do dowodu będzie nam potrzebny techniczny lemat:

<u>Lemat</u>: Niech $a_{ij}\in\mathbb{R}$ dla $i,j\in\mathbb{N}$. (można też bez zmian w dowodzie założyć, że $a_{ij}\in\mathbb{C}$).
Oznaczmy $b_i=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$. Jeżeli $\forall_{i\in\mathbb{N}}\ b_i<\infty$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} b_i<\infty$, to
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$
(można zamienić kolejność sumowania).

<u>Dowód</u>: Niech $A=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}\subset\mathbb{R}$.
Zdefiniujemy $f_i, g: A\to\mathbb{R}$ dla $i\in\mathbb{N}$ następująco:
$$f_i(0)=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad f_i\left(\tfrac{1}{n}\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$
$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad \text{dla } x\in A.$$

Zauważmy, że jedynym punktem skupienia zbioru A jest 0; $\lim_{n\to\infty} f_i(\frac{1}{n})=f_i(0)$, więc funkcje f_i są ciągłe na A.
Wiemy też, że $\forall_i \forall_{x\in A} |f_i(x)|\le b_i$ i $\sum b_i<\infty$,
więc na mocy kryt. Weierstrassa szereg definiujący funkcję g

jest na A jednostajnie zbieżny. Oznacza to, że funkcja g jest ciągła na A, a zatem

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\tfrac{1}{n}\right) = g(0) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(0) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \cancel{f_i}\, a_{ij} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \qquad \square$$

sumę skończoną i nieskończoną wolno zamienić!

<u>Dowód twierdzenia.</u>

Dla każdego $y \in (x_0 - R, x_0 + R)$ mamy

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0 + y_0 - x_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y-y_0)^k (y_0-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k}(y-y_0)^k (y_0-x_0)^{n-k}$$

Przyjmując (zgodnie z def. symbolu dwumianowego) $\binom{n}{k} = 0$ dla $k>n$ możemy dalej napisać

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_n \binom{n}{k}(y-y_0)^k (y_0-x_0)^{n-k}}_{\alpha_{nk}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = (*)$$

Chcemy zamienić kolejność sumowania - żeby to zrobić, musimy wiedzieć, że $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < \infty$, gdzie $\beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}|$

Mamy

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} |y-y_0|^k |y_0-x_0|^{n-k} =$$

$$= \cancel{\Sigma}\, |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |y-y_0|^k |y_0-x_0|^{n-k} =$$

$$= |a_n| \left(|y-y_0| + |y_0-x_0|\right)^n$$

Kiedy zbieżny jest $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|y-y_0| + |y_0-x_0|\right)^n$?

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| t^n$ ma ten sam promień zbieżności R, co szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (wynika to np. z wzoru Cauchy-Hadamarda), wiemy więc, że będzie zbieżny, jeżeli

$$|y-y_0| + |y_0 - x_0| < R$$

a więc gdy $|y-y_0| < R - |y_0 - x_0| = R_1$

Stąd, dla $y \in (y_0 - R_1, y_0 + R_1)$, możemy zamienić kolejność sumowania (i po zamianie szereg wciąż będzie zbieżny).

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (y-y_0)^k (y_0 - x_0)^{n-k} =$$

to jest $=0$, jeżeli $n<k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (y_0 - x_0)^{n-k} \right)}_{b_k} (y-y_0)^k$$

Z udowodnionego wcześniej twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że $b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0)$; można to też sprawdzić na palcach:

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(x-x_0)^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{n-k} \quad \text{dla } x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

więc $\frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{k!(n-k)!} (y_0 - x_0)^{n-k} = b_k$.

Uwaga: Promień zbieżności szeregu $\sum b_n (y-y_0)$ jest nie mniejszy od R_1, ale może być od R_1 większy.

Niech $f(t) = \frac{1}{1-t}$. Oczywiście $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ dla $t \in (-1,1)$

Rozwińmy f wokół $t_0 = \frac{1}{2}$

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (t - \frac{1}{2})} = \frac{2}{1 - 2(t-\frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} (t - \tfrac{1}{2})^n.$$

o ile $2|t - \frac{1}{2}| < 1$ ← promień zbieżności $= \frac{1}{2} = R_1$

czyli $t \in (0,1)$

i wokół $t_0 = -\frac{1}{2}$

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{\frac{3}{2} - (t+\frac{1}{2})} = \frac{2/3}{1 - 2/3(t+\frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (t+\tfrac{1}{2})^n$$

o ile $\frac{2}{3}|t+\frac{1}{2}| < 1$

czyli $t \in (-2,1)$

promień zbieżności $3/2 > R_1$

Oznaczenia: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym.

$C^k(A)$ – zbiór funkcji k-krotnie różniczkowalnych, których wszystkie pochodne, z k-tą włącznie, są ciągłe na A.

$C^\infty(A)$ – zbiór funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych na A (wtedy automatycznie wszystkie pochodne są na A ciągłe)

$C^\omega(A)$ – funkcje analityczne na A, a więc zbiór tych funkcji, które wokół każdego punktu zbioru A można rozwinąć w szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności.

Dla dowolnego niepustego ~~zbioru~~ przedziału otw. A mamy

$$C^\omega(A) \subsetneq C^\infty(A) \subsetneq C^k(A) \subsetneq C^{k-1}(A) \subsetneq \ldots \subsetneq C^0(A) = C(A).$$

~~Na z…~~

Łatwo można sprawdzić (zadanie), że dla $A=(-1,1)$ $x^k|x| \in C^k(A)$, ale $x^k|x| \notin C^{k+1}(A)$; wiemy już też, że funkcja $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$ nie jest w $x_0 \neq 0$ sumą swojego szeregu Taylora w 0:

$$(**) \quad f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$$

Nie jest też sumą żadnego innego szeregu potęgowego wokół 0, o dodatnim promieniu zbieżności, bo wtedy szereg ten musiałby być postaci $(**)$ (z tw. o jednoznaczności rozwinięcia).