$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2(x-x_0) + \frac{6x_0}{2}(x-x_0)^2 =$$

$$= 3x_0x^2 - 6x_0^2x + x_0^3$$

$$T_3(x) = x_0^3 + 3x_0^2(x-x_0) + 3x_0(x-x_0)^2 + 6(x-x_0)^3 =$$

$= x^3$ ← i dobrze, trudno lepiej przybliżyć funkcję $f(x)=x^3$ wielomianem stopnia ≤ 3

$$T_4(x) = T_5(x) = \ldots = x^3.$$

$x_0 = 1$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = 3x-2$

$T_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$

$T_3(x) = T_4(x) = \ldots = x^3$

2. $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 1$; wtedy $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ f^{(k)}(x) = e^x$

$T_0(x) = f(1) = e$

$T_1(x) = \cancel{f(0) + f'(0)(x-0)}$

$= f(1) + f'(1)(x-1) = e + e(x-1) = ex$

$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \cancel{x + \frac{1}{2}(x-1)^2 =}$

$\cancel{= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$

$$= ex + \frac{e}{2}(x-1)^2 = \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2}$$

$$T_n(x) = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n =$$

$$= e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{e}{n!}(x-1)^n =$$

$$= e\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!} = e\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}\right] = \underbrace{e\cdot e^{x-1}}_{=e^x} - e\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}$$

i widać, że $r_n(x) = e\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} = e(x-1)^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^{k-n-1}}{k!}$.

Dla $|x-1|\le 1$ $\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^{k-n-1}}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e,$ 221

więc
$$-e^2|x-1|^{n+1} \le r_n(x) \le e^2|x-1|^{n+1}$$
skąd od razu widać, że $\lim_{x\to 1}\frac{r_n(x)}{|x-1|^n} = 0$.

3. $f(x) = \sin x$, $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad\qquad f''(0) = 0$

$\vdots$

$\cancel{f^{(k)}(x)} \Rightarrow f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \qquad\qquad f^{(2k)}(0) = 0$

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad\qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

Stąd
$$\sin x = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + r_{2k+1}(x) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + r_{2k+1}(x)$$
$$r_{2k+1}(x) = 0 + r_{2k+2}(x)$$

A nawet

reszta ma tę własność, że $\frac{r_{2k+2}(x)}{x^{2k+2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

I dobrze - wiemy, że $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ więc wzór Taylora odtwarza po kawałku znany nam szereg definiujący $\sin x$. Wiemy w szczególności, że szereg ten jest dla każdego x zbieżny, a więc $r_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Tego nam twierdzenie Peano nie mogło dać.

<u>Pytanie</u>: Czy to ogólna reguła? Czy zawsze we wzorze Taylora reszta maleje do 0 gdy $n\to\infty$?

NIE! Choć przykłady funkcji, dla których tak nie jest, nie są zupełnie trywialne. (222)

Standardowy przykład:

4. $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Łatwo można sprawdzić, że jest to funkcja ciągła w 0. Trochę więcej roboty (ćwiczenia!) ~~jest~~ potrzeba aby wykazać, że: ① f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w 0 (i na $\mathbb{R}$)

② $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; f^{(n)}(0) = 0$.

Oznacza to, że wzór Taylora dla f składa się wyłącznie z reszty!

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{0}{2!} x^2 + \ldots + \frac{0}{n!} x^n + r_n(x)$$

czyli $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; r_n(x) = f(x)$, nie zmienia się zatem gdy $n \to \infty$.

~~Przykład~~ Def (Symbol~~e~~ Peano). Najczęściej postać reszty mało nas interesuje - ważna jest tylko własność $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$. Peano zaproponował, by, jeżeli funkcje f i g mają tę własność, że $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} 0$, pisać

$$\text{„} f(x) = o(g(x)) \quad (\text{przy } x \to x_0)\text{"}.$$

czyt. „o małe od $g(x)$"

To wygodny zapis przy rachunkach, o czym się zaraz przekonamy.

Zastosowania wzoru Taylora

1. Twierdzenie o lokalnych ekstremach

Niech f będzie n-krotnie różniczkowalna w x_0;
$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Wówczas

(·) jeżeli n jest nieparzyste, to f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego

(··) jeżeli n jest parzyste, to f ma w x_0 ekstremum lokalne, przy czym ekstremum to jest minimum lokalnym gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, a maksimum lokalnym gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Dowód:

Mamy
$$f(x) = f(x_0) + \frac{\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{\overbrace{f^{(n-1)}(x_0)}^{=0}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) =$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

skąd
$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \right]$$

Wyrażenie $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ dąży do 0 przy $x \to x_0$, więc dla x bliskich x_0 cały nawias kwadratowy ma ten sam znak, co $f^{(n)}(x_0)$.

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn}(x-x_0)^n \cdot \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$$

Jeżeli n jest nieparzyste, to znak $(x-x_0)^n$ zmienia się przy przejściu x przez x_0, więc $f(x) - f(x_0)$ nie ma

w otoczeniu x_0 stałego znaku, co oznacza, że f nie ma w x_0 ekstremum lokalnego.
Jeżeli zaś n jest parzyste, to dla x bliskich x_0, ale od x_0 różnych mamy $\operatorname{sgn}(f(x)-f(x_0)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$ i

$$f(x)-f(x_0)>0 \quad \text{gdy } f^{(n)}(x_0)>0$$
$$f(x)-f(x_0)<0 \quad \text{gdy } f^{(n)}(x_0)<0,$$

z czego natychmiast wynika teza.

2. Obliczanie granic.

Obliczmy
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\,[\ln(1+\frac{x}{2})]^2}{\sin x\,(\cos x-1)^2} = ?$$

Wiemy, że: $\ln(1+t) = t + o(t)$, więc $\ln(1+\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + o(x)$

$\sin x = x + o(x)$, $\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, skąd
$$(\cos x - 1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

zatem

$$\frac{\sqrt{x}\,[\ln(1+\frac{x}{2})]^2}{\sin x\,(\cos x-1)^2} = \frac{x^{1/2}\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)^2}{(x+o(x))\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)} =$$

$$= \frac{x^{1/2}\cdot\left(\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}{\frac{x^5}{4}+o(x^5)} = \frac{1}{\underbrace{\cancel{x^{5}}}_{x^{5/2}\to 0^+}{}^{5/2}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}\right)}{\left(\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}\right)} \xrightarrow{x\to 0^+} \frac{1/4}{0^+\cdot\frac{1}{4}} = +\infty$$

Postaci reszty

Potrzebujemy informacji nie tylko o tym, co się dzieje z $r_n(x)$ przy $x \to x_0$, ale też o tym, jak $r_n(x)$ zależy, dla ustalonego x, od n.

O $r_n(x)$ wiemy tyle, że

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x;x_0) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję

$$\varphi(z) := f(x) - T_n(x;z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Oczywiście $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(x)$.

Załóżmy teraz dodatkowo, że <u>f jest $(n+1)$ razy różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_0.</u>

Ustalmy teraz x wewnątrz tego otoczenia, (dla ustalenia uwagi $x > x_0$, ale dla $x < x_0$ identycznie). Wówczas φ jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna wewnątrz — a więc możemy do φ stosować tw. o wartości średniej.

Obliczmy najpierw $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{1!}\right] - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{2!}\cdot 2(x-z)\right] - \left[\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{3!}3(x-z)^2\right]$$

$$- \ldots - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}n(x-z)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n .$$

Wybierzmy teraz dowolną $\psi(z)$ ciągłą i ściśle monotoniczną na $[x_0, x]$, różniczkowalną wewnątrz.

Z tw. Cauchy'ego o wart. średniej

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad \text{dla pewnego } \xi \in [x_0, x]$$

skąd

$$r_n(x) = \varphi(x_0) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}(\psi(x)-\psi(x_0)) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)} .$$

Dla różnych ψ dostajemy różne postaci reszty.

Np. dla $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$ mamy $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$, $\psi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$, zatem

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cancel{(x-\xi)^n}\,\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>reszta w postaci Lagrange'a</u>

Kładąc natomiast $\psi(z) = x - z$ dostajemy

$$\psi(x)=0, \quad \psi(x_0)= x-x_0, \quad \psi'(\xi)=-1,$$

skąd
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

reszta w postaci Cauchy'ego.

(ten sam wynik dostaniemy przykładając do $\varphi(z)$ tw. Lagrange'a o wart. średniej, zamiast tw. Cauchy'ego).

Często zapisując te postaci reszty korzysta się z faktu, że $\xi \in (x_0, x)$ daje się zapisać jako kombinacja wypukła x_0 i x: $\xi = \theta x + (1-\theta)x_0$ dla pewnej $\theta \in (0,1)$, wówczas $x - \xi = (1-\theta)(x-x_0)$ i reszta w post. Lagrange'a zapisuje się jako

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1-\theta)x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

a w postaci Cauchy'ego

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1-\theta)x_0)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

dla pewnej $\theta \in (0,1)$

Szereg dwumianowy Newtona

Zdefiniujmy <u>symbol Newtona</u>:

Dla dowolnej $a\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}\quad ; \quad \binom{a}{0}=1$$

Prościutkim rachunkiem można sprawdzić, że

$$\binom{a}{n-1}+\binom{a}{n}=\binom{a+1}{n} \quad \text{oraz że} \quad \binom{a+1}{n}=\frac{a+1}{n}\binom{a}{n-1}$$

Będziemy badać szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$.

Z kryterium d'Alemberta natychmiast wynika, że $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in(-1,1)}$ szereg ten jest bezwzględnie zbieżny.

<u>Zadanie</u>: $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$

Wskazówka: Indukcja po n.

Oznaczmy teraz sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ przez $f(a,x)$; dla uproszczenia notacji będę czasem pomijał x, pisząc po prostu $f(a)$. Mamy

$$f(a)\cdot f(b)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{z tw. o iloczynie Cauchy'ego}\\ \text{szeregów bezwzgl. zbieżnych}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k\binom{b}{n-k}x^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{z zadania}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\binom{a+b}{n}=f(a+b).$$

Przypomnijmy teraz twierdzenie charakteryzujące funkcję wykładniczą:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli funkcja g spełnia

① $g(x+y) = g(x)g(y)$ dla dow. x, y

② $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x} = A$

to $g(x) = e^{Ax}$.

Żeby móc zastosować to twierdzenie do funkcji f, musimy jeszcze sprawdzić warunek ②, a więc czy istnieje i ile jest równa

$$\lim_{a\to 0} \frac{f(a)-1}{a}$$

Jeżeli ustalimy, że granica ta istnieje i jest równa $A(x)$ (f zależy nie tylko od a, ale i od x, więc granica zależy od x), będziemy wiedzieli, że

$$f(a,x) = e^{A(x)\cdot a}$$

No, to liczymy:

$$\frac{f(a,x)-1}{a} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^k - 1}{a} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^k}{a} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{a}(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)}{\cancel{a}\cdot k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{a}{k-1}\right)\cdot\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

$= (**)$

Co się dzieje z tym szeregiem, gdy $a \to 0$?

• Gdy patrzymy na każdy wyraz z osobna, widzimy, że dąży on do $\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$. Czy zatem

$$\frac{f(a,x)-1}{a} \xrightarrow[a\to 0]{} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = (*) \quad ?$$