<u>Twierdzenie</u>: Niech $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, $\underset{n}{\forall}$ f_n całk. w s. Riemanna.

Wtedy:

1. f jest całk. w s. Riemanna
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

Remanent – zadanie: Znajdź (f_n) tż f_n całk. w s.R $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ f nie jest całk w s.R. JEST FAŁSZYWE

<u>Dowód</u>:

Na początek oznaczmy przez I_n całkę $\int_a^b f_n(t)\,dt$.

Wykażemy, że ciąg $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny:

Funkcje (f_n) spełniają jednost. warunek Cauchy'ego, a więc $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n,m>n_0}{\forall}\ \underset{t\in[a,b]}{\forall}$ $|f_n(t)-f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Stąd $\underset{n,m>n_0}{\forall}$ $$|I_n - I_m| = \left|\int_a^b (f_n(t)-f_m(t))\,dt\right| \le$$
$$\le \int_a^b |f_n(t)-f_m(t)|\,dt < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon.$$

Ciąg (I_n) spełnia zatem war. Cauchy'ego.

Oznaczmy $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ przez I.

Ustalmy teraz n takie, że ① $\sup\limits_{[a,b]} |f-f_n| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

② $|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}$

~~i δ>0 takie, że~~

i $\delta>0$ takie, że jeżeli $\delta(\nu)<\delta$, to dla dow. punktowania ξ
$$|S(f_n,\nu,\xi) - I_n| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wtedy ~~dla dow. punk~~

$$|S(f,\nu,\xi) - I| \le |S(f,\nu,\xi) - S(f_n,\nu,\xi)| + \underbrace{|S(f_n,\nu,\xi) - I_n|}_{<\,\varepsilon/4} + \underbrace{|I_n - I|}_{<\,\varepsilon/2} \le$$

Oszacujmy jeszcze: $|S(f,\nu,\xi)-S(f_n,\nu,\xi)|$:

$$|S(f,\nu,\xi)-S(f_n,\nu,\xi)| = \left|\sum_i \left(f(\xi_i)-f_n(\xi_i)\right)(x_i-x_{i-1})\right|$$

$$\leq \sum_i |f(\xi_i)-f_n(\xi_i)|\,|x_i-x_{i-1}| < \sum_i \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot(x_i-x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{4}$$

Co w sumie daje

$$|S(f,\nu,\xi)-I|<\varepsilon \quad \text{, o ile tylko } \delta(\nu)<\delta.$$

a więc ① f całk. w s. R.

② $\int_a^b f(t)\,dt = I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$

Przydatnym narzędziem do badania i szacowania rozmaitych całek jest nierówność Höldera (znamy ją już dla sum skończonych i szeregów).

<u>Twierdzenie</u> (nier. Höldera ~~z~~ dla sum skończonych)

Dla dowolnych $a_1, a_2, \dots, a_k$ i $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ oraz $p, q > 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q \Big)^{1/q}$$

<u>Dowód</u>: ~~Jeżeli~~ Oznaczmy $A = \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \Big)^{1/p}$, $B = \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q \Big)^{1/q}$

Jeżeli $A = 0$ lub $B = 0$, to odpowiednio wszystkie a_i lub wszystkie b_i są $= 0$, a więc nierówność jest prawdziwa $(0 \leq 0)$. Załóżmy zatem, że $A \neq 0$ i $B \neq 0$.

Niech teraz $\alpha_i = \frac{|a_i|}{A}$, $\beta_i = \frac{|b_i|}{B}$ dla $i = 1, \dots, k$.

Z nier. Younga wiemy, że $\alpha_i \beta_i \leq \frac{1}{p} \alpha_i^p + \frac{1}{q} \beta_i^q$.

Stąd

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i b_i}{A \cdot B} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{|a_i|}{A} \cdot \frac{|b_i|}{B} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{k} \beta_i^q =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k} \frac{|a_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{k} \frac{|b_i|^q}{B^q} = \frac{1}{p} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p}{A^p}}_{= 1} + \frac{1}{q} \underbrace{\frac{\sum |b_i|^q}{B^q}}_{= 1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\square$.

Twierdzenie (nier. Höldera dla całek)

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą całkowalne na $[a,b]$, $p, q > 1$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

Dowód:

Rozważmy podział ν_m odcinka $[a,b]$ na m równych części, z punktowaniem ξ_m wybierającym lewy koniec (tj. jeżeli $\nu_m = \cancel{x_0, x_1, \dots, x} \; (x_{m,0}, x_{m,1}, \dots, x_{m,m})$ to $\xi_{m,k} = x_{m,k-1}$ dla $k = \cancel{0}, 1, 2, \dots, m$).

Wówczas

$$S(f \cdot g, \nu_m, \xi_m) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_{m,k}) g(\xi_{m,k}) \frac{b-a}{m} =$$

$$= \frac{b-a}{m} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_{m,k}) g(\xi_{m,k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nier. Höldera} \\ \text{dla sum}}}{\le} \frac{b-a}{m} \left(\sum_{k=1}^{m} |f(\xi_{m,k})|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} |g(\xi_{m,k})|^q\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{m} |f(\xi_{m,k})|^p \frac{b-a}{m}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |g(\xi_{m,k})|^q \frac{b-a}{m}\right)^{1/q}$$

~~funkcje $|f|^p$ i $|g|^q$ są całkowalne w s. R (dlaczego?)~~

$$= \left(S(|f|^p, \nu_m, \xi_m)\right)^{1/p} \cdot \left(S(|g|^q, \nu_m, \xi_m)\right)^{1/q}$$

Przechodząc z m do ∞ dostajemy z lewej strony

$\int_a^b f(t)g(t)\,dt$, a z prawej, dzięki temu, że $|f|^p$ i $|g|^q$ są całk. w s. R (dlaczego?)

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Uwaga: n. Höldera jest prawdziwa również dla całek niewłaściwych (prościutkie zadanie).

Twierdzenie: $\ln \Gamma$ jest funkcją wypukłą na $(0,\infty)$.

(mówimy, że Γ jest logarytmicznie wypukła).

Dowód: Niech $\lambda \in (0,1)$

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) = \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t} \cdot t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}\, dt$$

$$\underset{\text{n. Höldera}}{\leq} \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{\lambda} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^{\lambda}\, \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

z $p = \frac{1}{\lambda}$, $q = \frac{1}{1-\lambda}$

$f(t) = t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t}$

$g(t) = t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}$

Stąd $\ln \Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \ln \Gamma(x) + (1-\lambda) \ln \Gamma(y)$.

$\square$.

Twierdzenie (H. Bohr) Harald August Bohr (1887-1951)

Jedyną funkcją f z $(0,\infty)$ w $\mathbb{R}$ spełniającą warunki

1. $f(1) = 1$
2. $\forall_{x>0}\ f(x+1) = x f(x)$
3. f jest logarytmicznie wypukła

jest Γ Eulera.

Dowód

Zauważmy na początek, że jeżeli znamy wartości funkcji f na $(0,1]$, to przy pomocy relacji (2) możemy wyznaczyć jej wartość w dowolnym $x>0$. Wystarczy zatem sprawdzić, że $f(x) = \Gamma(x)$ dla $x \in (0,1]$.

Przypomnijmy teraz tw. o monotoniczności ilorazów różnicowych: jeżeli F jest wypukła, to $I_F(x,y) = \frac{F(x)-F(y)}{x-y}$ jest ~~rosnąca~~ niemalejącą funkcją każdej ze zmiennych x, y.

Stąd, dla $F = \ln f$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $x \in (0,1]$

$$I_{\ln f}(n, n-1) \leq I_{\ln f}(n+x, n) \leq I_{\ln f}(n+1, n)$$

Oczywiście z ① i ② $f(n) = (n-1)!$, stąd

$$\ln[(n-1)!] - \ln[(n-2)!] \leq \frac{\ln f(n+x) - \ln[(n-1)!]}{x} \leq \ln(n!) - \ln[(n-1)!]$$

$$\ln(n-1) \leq \frac{1}{x} \ln \frac{f(x+n)}{(n-1)!} \leq \ln n$$

$$\ln(n-1)^x \leq \ln f(x+n) - \ln(n-1)! \leq \ln n^x$$

$$\underbrace{\ln(n-1)^x + \ln(n-1)!}_{=\ln[(n-1)^x(n-1)!]} \leq \ln f(x+n) \leq \underbrace{\ln n^x + \ln(n-1)!}_{=\ln[n^x(n-1)!]}$$

$$\Downarrow$$

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$$

$$f(x+n) = (x+n-1) f(x+n-1) = \ldots = (x+n-1)(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\, x\, f(x)$$

Stąd

$$L_{n-1}(x) := \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)} =: P_{n-1}(x)$$

$$\forall_{x\in(0,1]}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ L_{n-1}(x) \leq f(x) \leq P_{n-1}(x)$$

a więc też

$$L_n(x) \leq f(x) \leq P_{n-1}(x)$$

$$L_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)} = L_n(x) \cdot \underbrace{\frac{x+n}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

z tw. o 3 ciągach

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

Uzyskaliśmy więc, zakładając, że f spełnia ①–③, konkretny wzór ~~na~~ tę funkcję – a zatem może istnieć co najwyżej jedna taka funkcja! A Γ spełnia założenia ①–③.

□.

Wniosek: $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$.

Funkcja B (beta) Eulera

Def. Dla dowolnych $a, b > 0$

$$B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Uwaga: Powyższa definicja ma sens dla wszystkich $a, b > 0$ (~~a więc~~ czyli definiująca $B(a,b)$ całka, nie zawsze właściwa, jest zbieżna.

Dowód: Dla $a, b \geq 1$ funkcja podcałkowa jest ciągła na $[0,1]$, więc całka jest właściwa.

Dla pozostałych a, b:

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \int_0^{1/2} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt + \int_{1/2}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

Jeżeli $a \geq 1$, pierwsza całka jest całką właściwą;

Gdy $a \in (0,1)$,

$$\int_0^{1/2} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \leq \int_0^{1/2} t^{a-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{b-1}dt = 2^{1-b}\int_0^{1/2} t^{a-1}dt = 2^{1-b}\frac{t^a}{a}\Big|_0^{1/2} < \infty$$

~~Jeżeli~~ Jeżeli $b \geq 1$, druga całka jest właściwa,

jeżeli $b \in (0,1)$,

$$\int_{1/2}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \underset{\substack{s=1-t\\ ds=-dt}}{=} \int_0^{1/2} s^{b-1}(1-s)^{a-1}ds$$

i tę całkę możemy oszacować tak samo, jak tę (z a i b zamienionymi).

<u>Def:</u> Funkcję Beta Eulera nazywamy funkcję dwóch zmiennych
$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt \qquad a,b>0.$$

Wykazaliśmy na poprzednim wykładzie, że rzeczywiście $B(a,b)$ jest dobrze określona dla wszystkich $a,b>0$ (tj. odpowiednia całka jest zbieżna).

<u>Twierdzenie</u> (o własnościach funkcji beta)

Dla dowolnych $a,b>0$

① $B(a,b)=B(b,a)$

② dla dowolnego ustalonego $a>0$ funkcja $B(a,\cdot):(0,\infty)\to(0,\infty)$, $b\mapsto B(a,b)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą

③ $B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b)$

④ $B(a,b+1)=\frac{b}{a+b}B(a,b)$

⑤ $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

<u>Dowód:</u>

① $$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt \underset{\substack{s=1-t\\ ds=-dt}}{=} \int_1^0 (1-s)^{a-1}s^{b-1}(-ds)=$$
$$=\int_0^1 s^{b-1}(1-s)^{a-1}\,ds = B(b,a)$$

② Mamy $$B(a,\lambda b_1+(1-\lambda)b_2)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{\lambda b_1+(1-\lambda)b_2-1}\,dt$$
$$=\int_0^1\left(t^{a-1}(1-t)^{b_1-1}\right)^\lambda\left(t^{a-1}(1-t)^{b_2-1}\right)^{1-\lambda}dt$$
$$\underset{\substack{\text{nier. Höldera}\\ p=\frac{1}{\lambda}\quad q=\frac{1}{1-\lambda}\\ \text{dla } \lambda\in(0,1)}}{\leq}\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b_1-1}dt\right)^\lambda\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b_2-1}dt\right)^{1-\lambda}=B(a,b_1)^\lambda B(a,b_2)^{1-\lambda}$$

Logarytmując obie strony otrzymujemy tezę.

③ $$B(a+1,b)+B(a,b+1)=\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}dt+\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b dt=$$
$$=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[t+(1-t)\right]dt=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt=B(a,b).$$

④ $$B(a,b+1)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b dt=\int_0^1\left(\frac{t^a}{a}\right)'(1-t)^b dt=$$
$$=\frac{t^a}{a}(1-t)^b\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t^a}{a}\cdot b(1-t)^{b-1}\cdot(-1)dt=$$
$$=0+\frac{b}{a}\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}dt=\frac{b}{a}B(a+1,b)$$

Stąd $B(a,b)\underset{③}{=}B(a+1,b)+B(a,b+1)=\left[\frac{a}{b}+1\right]B(a,b+1)$
$$=\frac{a+b}{b}B(a,b+1)$$
co jest równoważne tezie.

⑤ Zbadajmy funkcję $f(\cancel{b})=B(a,b)\cdot\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}$

$$\ln f(b)=\underbrace{\ln B(a,b)}_{\text{wypukła z ②}}+\underbrace{\ln\Gamma(a+b)}_{\substack{\text{wypukła,}\\ \text{bo }\Gamma\text{ log. wypukła}\\ \text{(tryw. zadanie)}}}\underbrace{-\ln\Gamma(a)}_{\text{stała (więc wypukła)}},$$

zatem f jest logarytmicznie wypukła (suma funkcji wypukłych jest wypukła).

$$f(b+1)=B(a,b+1)\cdot\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a)}=\frac{b}{a+b}B(a,b)\cdot\frac{(a+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}=$$
$$=\cancel{b}\cdot B(a,b)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}=b\,f(b)$$

$$f(1)=B(a,1)\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=a\,B(a,1)=a\int_0^1 t^{a-1}dt=a\cdot\frac{t^a}{a}\Big|_0^1=\underline{1}$$

Na mocy tw. Bohra wiemy zatem, że $f(b)=\Gamma(b)$,
skąd $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Dalsze własności funkcji Γ

① Γ jest funkcją ciągłą na $(0,\infty)$

D-d $\ln\Gamma$ jest wypukły na $(0,\infty)$, więc jest funkcją ciągłą, stąd $\Gamma = e^{\ln\Gamma}$ jest ciągła

② Wzór Weierstrassa

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{x/k}}{1+\frac{x}{k}}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \cancel{\lim_{n\to\infty}} = \lim_{n\to\infty}(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)$$

gdzie γ to stała Eulera - Mascheroniego.

D-d

Wiemy, że $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{(x+n)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x} = (*)$

Przekształcamy:

$$(*) = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x\ln n}}{\frac{x+n}{n}\cdot\frac{x+n-1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{x+1}{1}} = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} e^{x\ln n}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{n})\cdot\ldots\cdot(1+x)} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} e^{x[\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}]}\cdot\frac{e^{x}\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{x}{n}}}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{x}{n})} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} e^{x\underbrace{[\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}]}_{\downarrow\ -\gamma}}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{x/k}}{1+x/k} =$$

$$= \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{x/k}}{1+x/k}$$

③ Wzór Legendre'a

Adrien-Marie Legendre
(1752–1833)

$$\forall_{x>0} \quad \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$$

D-d

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{x/2}}{\left(\frac{x}{2}+n\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\frac{x}{2}} \cdot \frac{n!\, n^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+n\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+n\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 n^x \sqrt{n}}{\frac{1}{2^{n+1}}(x+2n)\cdot\ldots\cdot(x+2)\cdot x \cdot \frac{1}{2^{n+1}}(x+2n+1)\cdot(x+2n-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2}(n!)^2 n^x \sqrt{n}}{(x+2n+1)(x+2n)\cdot\ldots\cdot x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^x}\cdot \underbrace{\frac{(2n)!\,(2n)^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+2n)}}_{\downarrow\ \Gamma(x)} \cdot \frac{(n!)^2\sqrt{n}\cdot 4^{n+1}}{(2n)!\,(x+2n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(x)}{2^x}\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\downarrow \text{ wzór Wallisa } \sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\frac{4n}{x+2n+1}}_{\downarrow\ 2} = \Gamma(x)\cdot 2^{-x}\cdot 2\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

Problem Bazylejski

Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\quad (=\zeta(2))$

Postawiony przez Pietro Mengoliego (1625-1686) w 1644, nabrał popularności, gdy w 1689 roku napisał o nim Jakub Bernoulli. Na początku XVII wieku problem ten miał status podobny do Wielkiego Tw. Fermata ~~pod koniec w drugiej połowie~~ w XX wieku.

W 1735 Euler opublikował pierwszy dowód (w pełni poprawny, choć nie w pełni ścisły) – był to bodajże pierwszy tak znaczący wynik w jego karierze.

Tu przedstawię Państwu dowód autorstwa Yoshio Matsuoki:

Jak dobrze pamiętamy

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt \underset{s=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Spróbujmy tę całkę „niedobrze" obliczyć przez części

$$I_n=\int_0^{\pi/2}(t)'\cos^{2n}t\,dt = \underbrace{t\cos^{2n}t\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} t\cdot 2n\cos^{2n-1}t\,(-\sin t)\,dt=$$

$$=2n\int_0^{\pi/2}t\sin t\cos^{2n-1}t\,dt = n\int_0^{\pi/2}(t^2)'\sin t\cos^{2n-1}t\,dt=$$

$$= n\,t^2\sin t\cos^{2n-1}t\Big|_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2}t^2\left[\cancel{\cos t}\cos t\cos^{2n-1}t + \sin t\cdot(2n-1)\cos^{2n-2}t\cdot(-\sin t)\right]dt$$

$$=-n\int_0^{\pi/2}t^2\left[\cos^{2n}t - (2n-1)\sin^2t\cos^{2n-2}t\right]dt = -n\int_0^{\pi/2}t^2\cos^{2n}t\,dt$$

$$+\,n(2n-1)\int_0^{\pi/2}\left[\cos^{2n-2}t-\cos^{2n}t\right]\cdot t^2\,dt$$

Oznaczając $J_n=\int_0^{\pi/2}t^2\cos^{2n}t\,dt$ otrzymujemy $I_n=-nJ_n+n(2n-1)J_{n-1}-n(2n-1)J_n$

czyli
$$n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Dzielimy stronami przez $\frac{(2n)!}{2\cdot 4^{n-1}[(n-1)!]^2}$:

$$\underbrace{\frac{n(2n-1)\cdot 2\cdot 4^{n-1}[(n-1)!]^2}{2\cdot (2n)!}}_{\frac{4^{n-1}[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}} J_{n-1} - \underbrace{\frac{2n^2\cdot 2\cdot 4^{n-1}[(n-1)!]^2}{(2n)!}}_{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}} J_n = \frac{\pi}{4n^2}$$

czyli
$$A_{n-1}J_{n-1} - A_n J_n = \frac{\pi}{4n^2}, \quad \text{gdzie } A_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$$

Sumując od $n=1$ do m:
$$\underbrace{A_0 J_0 - A_1 J_1 + A_1 J_1 - A_2 J_2 + \ldots + A_{m-1}J_{m-1} - A_m J_m}_{A_0 J_0 - A_m J_m} = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$$

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}, \quad \text{a więc} \quad \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} - \frac{4}{\pi}A_m J_m$$
$$A_0 = 1 \qquad\qquad = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi}A_m J_m$$

Wykażemy teraz, że $A_m J_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Dla $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ mamy nierówność $x < \frac{\pi}{2}\sin x$ (dlaczego?).

Stąd $J_m = \int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2m}x\,dx < \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{2m}x\,dx =$

$$= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\cos^{2m}x\,dx = \frac{\pi^2}{4}(I_m - I_{m+1}) = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{(2m)!}{4^m(m!)^2} - \frac{(2m+2)!}{4^{m+1}[(m+1)!]^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2m)!}{4^m(m!)^2}\left[1 - \frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2}\right] = \frac{\pi^3}{8}\cdot\underbrace{\frac{(2m)!}{4^m(m!)^2}}_{1/A_m}\cdot\frac{2m+1}{4(m+1)^2}$$

$$0 < A_m J_m \leq \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{2m+1}{4(m+1)^2} \xrightarrow{m \to \infty} 0 .$$

Ostatecznie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.