# Remanent

## 1. Wzór Taylora z resztą całkową.

Twierdzenie: Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie $(n+1)$-razy różniczkowalna na $[a,b]$ (w końcach - pochodne jednostronne), $f^{(n+1)}$ całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$. Niech $x_0\in[a,b]$. Wówczas ~~∀~~ dla każdego $x\in[a,b]$ zachodzi wzór

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{\cancel{(n+1)}\, n!}(x-t)^n\,dt$$

Dowód:

Na początek zauważmy, że funkcje $f, f', \dots, f^{(n)}$ są ciągłe na $[a,b]$; jeżeli $f$ spełnia założenia twierdzenia dla pewnego $n\in\mathbb{N}$, to spełnia je dla dowolnego $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ takiego, że $k<n$.

Twierdzenie udowodnimy przez skończoną indukcję po $k$.

$k=0$

$$f(x) \overset{\text{zasadnicze tw. RRiC}}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0\,dt.$$

Załóżmy teraz, że teza twierdzenia zachodzi dla pewnego $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$; wykażemy, że zachodzi również dla $k+1$.

Wiemy zatem, że

$$\forall_{x\in[a,b]}\quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k\,dt}_{r_k(x)}$$

Przyjrzyjmy się $r_k(x)$. Funkcja $f$ jest na $[a,b]$ $(k+2)$-razy różniczkowalna, więc możemy tę całkę przekształcić korzystając z wzoru na całkowanie przez części:

$$r_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]' dt =$$

różniczkowanie po $t$

$$= -\frac{f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt =$$

$$= -\left[0 - \frac{f^{(k+1)}(x_0)\,(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}\right] + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt =$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(x_0)\,(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt$$

skąd

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k +$$

$$+ \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt$$

Krok ten możemy powtarzać aż do $k = n-1$, gdy otrzymamy tezę twierdzenia. $\square$

Przyjrzyjmy się teraz ponownie wzorowi na $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

i przypomnijmy I całkowe tw. o wartości średniej:
Jeżeli $f$ ciągła na $[a,b]$, $g$ c. w s.R. i $\geq 0$ na $[a,b]$, to istnieje $\xi \in [a,b]$ tż $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\xi)\int_a^b g(t)dt$.

Zauważmy, że w tym twierdzeniu założenie $g \geq 0$ można zastąpić założeniem o tym, że $g$ ma na $[a,b]$ stały znak (gdy $g \le 0$ na $[a,b]$, wypisujemy I całk. tw. o w. śr. dla $\int_a^b f(t)[-g(t)]\,dt$ ).

~~Biorąc $[a,b] = [x_0, x]$,~~ Twierdzenie działa też gdy $b<a$. ~~trzeba by~~ (w założeniach żądamy wtedy, by $f$ i $g$ miały odp. własności na $[b,a]$).

Weźmy zatem $a = x_0$, $b = x$;

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}}_{\text{ciągłe na } [x,x_0]/[x_0,x]} \underbrace{(x-t)^n}_{\text{stałego znaku na } [x,x_0]/[x_0,x]} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt =$$

dla pewnego $\xi \in [x_0,x]/[x,x_0]$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}\right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Odtworzyliśmy w ten sposób resztę w postaci Lagrange'a

Zadanie: Odtworzyć z reszty w postaci całkowej resztę w postaci Cauchy'ego.

## 2. Całkowanie a zbieżność jednostajna

Twierdzenie: Niech $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f_n \rightrightarrows f$. Jeżeli $\forall_n\ f_n$ są c. w s. R i $f$ jest c. w s. R., to

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro $f_n \rightrightarrows f$, to $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

Stąd

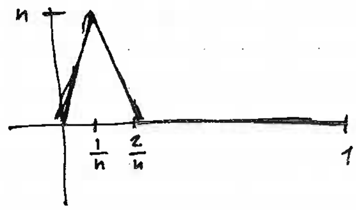
$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon\cdot(b-a) \quad \text{o ile } n>n_0$$

z dowolności $\varepsilon$ otrzymujemy teze.

<u>Zadanie</u>: Znajdź ciąg $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ t. że $f_n \rightrightarrows f$;
$\forall_n\ f_n$ całk. w s. R. na $[a,b]$, ale $f$ nie jest całk. w s. R.

<u>Przykład</u>, że nie wystarcza punktowa zbieżność:

Niech $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2 x + 2n & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$




$\forall_{x \in [0,1]}\ f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, więc $f(x) \equiv 0$

ale $\forall_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$, a $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

John Brehant Wallis (1616–1703)
tworzył szyfry dla Parlamentu i dworu królewskiego, wykładowca na Oxfordzie, wprowadził oś liczbową, ozn. $\infty$, potęgi o wykł. wymiernych, autor podręcznika gramatyki angielskiej.

3. <u>Wzór Wallisa</u>

Obliczmy $\int \sin^n x\,dx$. (dla $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$)

$$I_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x\,(-\cos x)'\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + \cancel{\int (n-1)}$$

$$+ (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

zatem
$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Niech teraz $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Z powyższego rachunku

$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$, więc dla <u>$n = 2m$</u>

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} J_0$$

a dla $n = 2m+1$

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot J_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1$$

Pozostaje obliczyć $J_0$ i $J_1$.

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Ostatecznie $$J_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2m}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \cancel{\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2m-1)}\, J_{2m}}$$

$$J_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2m+1)}.$$

Z tych dwóch wzorów

$$\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} = \frac{\pi}{2}\cdot(2m+1)\cdot\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}\right]^2$$

a więc

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2m+1}\cdot\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2m-1)}\right]^2\cdot\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}}$$

Zauważmy, że dla $x\in[0,\pi/2]$ $\quad \sin^{2m+1}x \le \sin^{2m}x \le \sin^{2m-1}x$,

więc $$J_{2m+1} \le J_{2m} \le J_{2m-1}$$

a zatem $$1 \le \frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} \le \frac{J_{2m-1}}{J_{2m+1}} = \frac{J_{2m-1}}{\frac{2m}{2m+1}J_{2m-1}} = \frac{2m+1}{2m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

skąd $$\lim_{m\to\infty}\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}} = 1,$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}\right]^2}_{\text{wzór Wallisa}}$$

Możemy go dalej przekształcać: $$\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2m}{1\cdot 3\cdot\ldots(2m-1)} = \frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2m)^2}{(2m)!} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}$$

więc $$\pi = \lim_{m\to\infty}\frac{2}{2m+1}\left[\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}\right]^2$$

i $$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}\cdot\underbrace{\sqrt{m}\cdot\sqrt{\frac{2}{2m+1}}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\,\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}$$

# 4. Wzór Stirlinga

Niech $a_n = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$. $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{e}{n}\right)^n} = (n+1)e\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$

$$= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Stąd $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 =$

$$= \left[e\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\right] \cdot \left[e\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{-(n-2)}\right] \cdot \ldots \cdot \left[e\left(1+\frac{1}{1}\right)^{-1}\right] \cdot e$$

i $\ln a_n = \left[1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] + \ldots + \left[1-\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)\right] + 1$

Chcemy oszacować $\ln a_n$ dla dużych $n$.
Zajmijmy się pojedynczym nawiasem $\left[1-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$

$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \ldots$

$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k^2} - \ldots$

$1-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \ldots = \frac{1}{2k} - b_k$, gdzie $b_k = \frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3} + \ldots$

$$\forall_k \quad b_k \in \left(\frac{1}{3k^2} - \frac{1}{4k^3}, \frac{1}{3k^2}\right)$$

Stąd $\ln a_n = \frac{1}{2(n-1)} - b_{n-1} + \frac{1}{2n-2} - b_{n-2} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 1} - b_1 + 1 =$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) - (b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln n + c_n) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k + 1$$

zauważmy, że ① $c_n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$ (stała Eulera-Mascheroniego)

② $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny, bo $\forall_k \; 0 < b_k < \frac{1}{3k^2}$

zatem $\underbrace{\frac{1}{2}c_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k + 1}_{D_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} D = \text{const.}$

$$\ln a_n - \frac{1}{2}\ln n = D_n \xrightarrow{n\to\infty} D = \text{const}$$

$$\ln \frac{a_n}{\sqrt{n}} \qquad \text{a więc } \frac{a_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow e^D = \text{const} > 0$$

Niech $\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n$. Skoro $\alpha_n \to e^D$, to $\alpha_{2n} \to e^D$

i
$$e^D = \frac{e^{2D}}{e^D} \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = \frac{(n!)^2}{n}\left(\frac{e}{\cancel{n}}\right)^{2n} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}\left(\frac{2\cancel{n}}{e}\right)^{2n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 2^{2n}$$

wzór Wallisa wersja 2. $\Big\downarrow n\to\infty$

$$\sqrt{2\pi}$$

Ostatecznie $\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2\pi}$, czyli

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

zatem dla dużych $n$ $\quad n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$

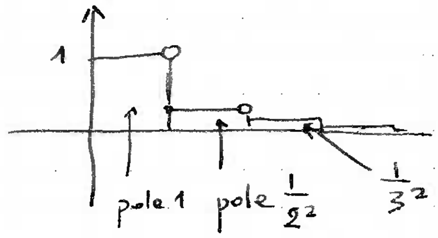
wzór Stirlinga — James Stirling 1692 – 1770

## Całki niewłaściwe

Przy obliczaniu długości okręgu natknęliśmy się na następujący problem: zdarza się, że chcemy scałkować funkcję, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, choć widać, że pole pod jej wykresem jest skończone: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ prostą zamianą zmiennych $x=\sin t$ sprowadziliśmy do całki, którą bez trudu obliczamy, uzyskując spodziewany wynik: $\pi$, choć funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nie jest na $(-1,1)$ ograniczona.

To jeden z dwóch ważnych problemów, pojawiających się w zastosowaniach. Drugi pojawia się, gdy chcemy obliczyć pole pod wykresem funkcji nad przedziałem nieograniczonym:

Niech $\forall_{x>0}\ f(x) = \frac{1}{([x]+1)^2}$




itd.

Oczywiście pole pod wykresem $f$ nad $[0,\infty)$ to

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty,$$

ale nasze definicje całki wprowadziliśmy jedynie na odcinkach domkniętych
(Uwaga: gdybyśmy wprowadzali podział $[0,\infty)$, to ~~co najmniej jeden z odcin~~ ostatni odcinek miałby nieskończoną długość — a więc, o ile tylko $f$ nie byłaby na nim identycznościowo zero, nieskończony wkład w sumę Riemanna).

Def: Załóżmy, że $f$ jest całkowalna w s.R. na $[a,c]$ dla każdego $a\leq c<b$ oraz że istnieje

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(t)\,dt.$$

Wówczas granicę tę nazywamy całką niewłaściwą z $f$ od $a$ do $b$ i oznaczamy $\int_a^b f(t)\,dt$.

Analogicznie, definiujemy $\int_a^b f(t)\,dt$, gdy $f$ jest całkowalna na $[c,b]$ dla każdego $a<c\leq b$ i istnieje $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(t)\,dt$.

Jak pisałem, problemy z całkowalnością $f$ na $[a,b]$ mogą być dwojakie:

– albo $b=+\infty$ (mówimy wtedy o całce niewłaściwej pierwszego rodzaju)

– albo $b<\infty$, ale $f$ nie jest w otoczeniu $b$ ograniczona, ~~albo np. b jest punktem skupienia punktów nieciągłości f~~ (lub nie jest w $b$ określona) (całka niewłaściwa drugiego rodzaju).

Zadanie: Wykaż, że jeżeli $f$ jest całkowalna w S.R. na $[a,c]$ dla każdego $c<b$ i jest ograniczona na $[a,b]$ $(b<\infty)$, to jest całkowalna w S.R na $[a,b]$

Wróćmy do $\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Funkcja podcałkowa jest nieograniczona zarówno w $-1$, jak i w $1$; żeby móc zastosować naszą definicję określimy tę całkę na dwie:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{c\to -1^+}\int_{c}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\lim_{c\to 1}\int_{0}^{c}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

Wiemy, że $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C$, więc

$$=\lim_{c\to -1^+}\arcsin t\Big|_{c}^{0}+\lim_{c\to 1}\arcsin t\Big|_{0}^{c}=$$

$$=-\lim_{c\to -1^+}\arcsin c+\lim_{c\to 1}\arcsin c=-\arcsin(-1)+$$

$$+\arcsin 1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

## Terminologia

Istnienie całki niewłaściwej oznacza istnienie pewnej granicy, zatem zamiast mówić, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(t)dt$ istnieje, i jest skończona mówimy, że jest zbieżna. Oczywiście jeżeli $\int_a^b f(t)dt$ jest całką właściwą ($f$ jest c. w s. R. na $[a,b]$), to całka ta jest automatycznie zbieżna (dlaczego?).

## Przykłady

(1) $$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} t \Big|_0^c = \lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$$

W praktyce piszemy najczęściej $\operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty$, rozumiejąc, że obliczając $\operatorname{arctg} t$ w górnej granicy bierzemy w rzeczywistości $\lim_{c\to\infty} \operatorname{arctg} c$.

(2) Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ zbieżne są całki

$$\int_1^\infty x^\alpha dx \,? \qquad \int_0^1 x^\alpha dx \,?$$

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^\alpha dx = \lim_{c\to\infty} \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_1^c & \alpha \neq -1 \\ \ln x \Big|_1^c & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{c\to\infty} \left(\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) = \begin{cases} +\infty & \alpha > -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \end{cases} \\ \lim_{c\to\infty} (\ln c - \ln 1) = +\infty & \alpha = -1 \end{cases}$$

a więc ta całka niewłaściwa jest zbieżna dla $\alpha < -1$ i rozbieżna do $\infty$ dla $\alpha \geq -1$.

Dla $\alpha > 1$ całka $\int_0^1 x^\alpha dx$ jest w rzeczywistości całką właściwą, bo $f(x) = x^\alpha$ jest ciągła na $[0,1]$.

Dla $\alpha = 0$ nie wiemy, jak określić $f(0)$, ale jakkolwiek to zrobimy, $f(x)$ będzie całk. w. s. R. na $[0,1]$, a kładąc $f(0)=1$ otrzymamy funkcję ciągłą na $[0,1]$

Dla $\alpha < 1$ $f$ nie jest ograniczona w otoczeniu punktu $x=0$.

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} \qquad \text{dla} \quad \alpha > 0$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^\alpha dx = \lim_{c\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_c^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \lim_{c\to 0^+} \frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \end{cases}$$

a dla $\alpha = -1$

$$= \lim_{c\to 0^+} \ln x \Big|_c^1 = -\lim_{c\to 0^+} \ln c = +\infty$$

A zatem całka ta jest zbieżna dla $\alpha > -1$ a dla pozostałych $\alpha$ jest rozbieżna do $+\infty$.

Przykłady:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ jest zbieżna.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \lim_{c\to\infty}\int\limits_0^c e^{-x^2}dx + \underbrace{\lim_{\tilde{c}\to-\infty}\int\limits_{\tilde{c}}^0 e^{-x^2}dx}_{\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_{-c}^0 e^{-x^2}dx \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_0^c e^{-y^2}dy} =$$

$$= 2\lim_{c\to\infty}\int\limits_0^c e^{-x^2}dx$$

$e^{x^2} \geq 1+x^2$, więc $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

$$\int\limits_0^c e^{-x^2}dx \leq \int\limits_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^c = \operatorname{arctg} c$$

stąd $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_0^c e^{-x^2}dx \leq \lim\limits_{c\to\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$,

o ile granica po lewej stronie istnieje.
Z drugiej strony $F(c)=\int\limits_0^c e^{-x^2}dx$ jest niemalejąca, bo $e^{-x^2}>0$,
a więc $\lim\limits_{c\to\infty} F(c)$ istnieje.
Stąd $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ istnieje ~~(jest zbie~~ i jest skończona, a więc ta całka jest zbieżna.

~~Def:~~ Twierdzenie (war. Cauchy'ego dla całek niewł.)

Załóżmy, że funkcja $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,c]$ dla każdego $c<b$.
Wówczas całka niewłaściwa $\int\limits_a^b f(t)dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{d_\varepsilon\in(a,b)}\ \forall_{x_1,x_2\in(d_\varepsilon,b)} \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

Dowód: war. Cauchy'ego istnienia $\lim\limits_{c\to b^-}\int\limits_a^c f(t)dt$.

Def: Jeżeli zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_a^b |f(t)|dt$, to mówimy, że całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(t)dt$$ jest zbieżna bezwzględnie.

Uwaga: Całka zbieżna bezwzględnie **jest** zbieżna

Dowód: Warunek Cauchy'ego:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt < \varepsilon \quad \text{o ile} \quad x_1, x_2 \in (d_\varepsilon, b)$$

Jeżeli całka jest zbieżna, ale nie jest zb. bezwzględnie, to jest zbieżna warunkowo.

Przykłady: cd.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$ jest zbieżna warunkowo.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x} = \int_0^{[\frac{c}{\pi}]\cdot\pi = \tilde{c}} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\tilde{c}}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Jeżeli $c > N\pi$, to $\left|\int_{\tilde{c}}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq |c - \tilde{c}| \max_{[\tilde{c}, c]} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \pi \cdot \frac{1}{[\frac{c}{\pi}]\cdot\pi} <$

$\leq \frac{1}{N}$, więc ten drugi człon dąży do 0

gdy $c \to \infty$. A co z pierwszym?

Niech $[\frac{c}{\pi}] = k$.

$$\int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x} = \sum_{l=1}^{k} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} a_l, \text{ gdzie}$$

$$a_l = (-1)^{l-1} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

Zauważmy, że ① $\forall_l\ a_l > 0$ ② $|a_l| \leq \frac{1}{(l-1)\pi}$; więc $a_l \xrightarrow{l \to \infty} 0$

(3) $a_{l+1} \leq a_l$, bo $a_{l+1} = \int_{l\pi}^{(l+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \underset{\substack{y = x-\pi \\ dy = dx}}{=} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{|\sin(y+\pi)|}{y+\pi}\,dy =$

$= \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{|\sin y|}{y+\pi}\,dy \leq \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \frac{|\sin y|}{y} = a_l$.

Stąd, z kryterium Leibniza, szereg $\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} a_l$ jest zbieżny, a zatem istnieje skończona granica $\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} a_l$ (oczywiście gdy $c \to \infty$, to i $k \to \infty$).

Wykażemy teraz, że $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ nie jest zbieżna (a zatem $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ nie jest zbieżna bezwzględnie).

Załóżmy przeciwnie – że $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = A < \infty$.

Wtedy

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{3}}^{k\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \underset{\substack{\text{bo na } ((k-1)\pi+\frac{\pi}{3},\, k\pi-\frac{\pi}{3}) \\ |\sin x| \geq \sqrt{3}/2}}{\geq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{3}}^{k\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{x}\,dx \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{3}}^{k\pi-\pi/3} \frac{dx}{k\pi-\pi/3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{k\pi-\frac{\pi}{3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{k\pi-\pi/3} = \infty$$

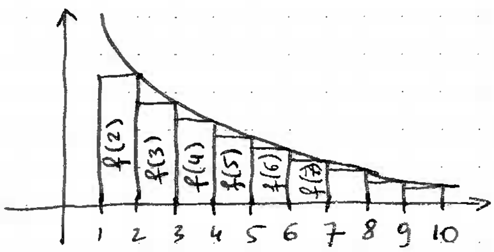
(to, że ten ostatni szereg jest rozbieżny, łatwo można sprawdzić używając np. asymptotycznego kryterium porównawczego, porównując go z $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$).

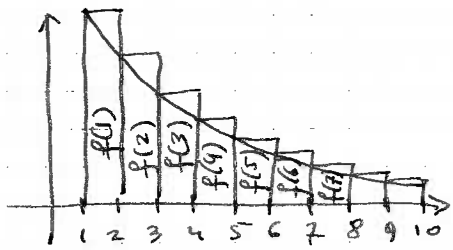
<u>Zadanie</u>: Sprawdzić, że $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ ~~nie~~ jest zbieżna warunkowo.

# Twierdzenie (kryterium całkowe Cauchy'ego – Maclaurina)

Niech $f:[1,\infty) \to (0,\infty)$ będzie nierosnąca. Wówczas $\int_1^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Dowód:




$$\int_1^\infty f(t)\,dt \geq \sum_{n=2}^\infty f(n) \qquad \int_1^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

A precyzyjniej: ① $f$ jest całkowalna na $[1, a]$ dla dowolnego $a > 1$, bo jest monotoniczna;

② $\forall_n \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$, zatem

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t)\,dt}_{= \int_1^n f(t)dt} \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

③ $$\sum_{k=1}^\infty f(k+1) \leq \int_1^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^\infty f(k)$$

$$\sum_{k=1}^\infty f(k+1) = \int_{k=2}^\infty f(k)$$

skąd natychmiast otrzymujemy tezę.

Wniosek – Przykład: $\int_2^\infty \frac{dt}{t\ln t}$ jest rozbieżna, bo szereg $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$ jest rozbieżny.

Inny przykład: Dla jakich $\alpha, \beta > 0$ zbieżna jest całka $\int_3^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha(\ln(\ln t))^\beta}$? Dla szeregu $\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\alpha(\ln(\ln n))^\beta}$ umiemy dać odpowiedź dwukrotnie używając kryterium o zagęszczaniu.

# Kryterium Abela – Dirichleta dla całek niewłaściwych

Twierdzenie: Niech $g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna i ograniczona. Załóżmy ponadto, że

(A) $\int_a^\infty f(t)\,dt$ istnieje i jest skończona

lub

(D) $\begin{cases} \forall_{x>a} \quad f \text{ jest całkowalna w s. R. na } [a,x] \\ \text{oraz } \exists_{M>0} \ \forall_{x_1,x_2>a} \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \le M \\ \text{oraz } \lim_{x\to\infty} g(x) = 0. \end{cases}$

Wówczas $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$ jest zbieżna.

Dowód: Sprawdzimy, że dla $\int_a^\infty f(t)g(t)\,dt$ spełniony jest war. Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon>0$.

Funkcje $f$ i $g$ spełniają założenia II twierdzenia całkowego o wartości średniej, zatem

$$\forall_{x_2>x_1>a} \ \exists_{\xi\in(x_1,x_2)} \quad \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt = g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt$$

$g$ jest ograniczona na $[a,\infty)$; niech więc $\tilde{M}$ będzie takie, że $\forall_{x\ge a} \ |g(x)| \le \tilde{M}$.

Załóżmy, że zachodzi warunek (A). Możemy wówczas znaleźć $d_\varepsilon$ takie, że $\forall_{y_1,y_2>d_\varepsilon} \ \left|\int_{y_1}^{y_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}}$.

Weźmy teraz $x_1, x_2 > d_\varepsilon$; $x_1 < x_2$. (a więc i $\xi > d_\varepsilon$).

$\left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}}$, $\left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{M}}$, zatem

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt\right| \overset{(*)}{\leq} |g(x_1)|\left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| + |g(x_2)|\left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| <$$

$$< \tilde{M}\cdot\frac{\varepsilon}{2\tilde{M}} + \tilde{M}\cdot\frac{\varepsilon}{2\tilde{M}} = \varepsilon.$$

Jeżeli natomiast ~~zachodzi~~ spełniony jest warunek (D), to znajdziemy $d_\varepsilon > a$ t.ż. $\forall_{x > d_\varepsilon}\ |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$

i dla $x_1, x_2 > d_\varepsilon$, $x_1 < x_2$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\,dt\right| \leq \text{(jak w (*) na górne strony)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M = \varepsilon.$$

## Całka Poissona

Wykazaliśmy już, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ jest zbieżna. Obliczymy teraz jej wartość.

Oczywiście $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$,

prościutkie rachunki

zajmiemy się zatem całką $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

bo wiemy, że całka jest zbieżna!

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \underset{\substack{x = t\sqrt{n}\\ dx = \sqrt{n}\,dt}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nt^2}\cdot\sqrt{n}\,dt = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

$e^{-nt^2} = \left(e^{-t^2}\right)^n \geq (1-t^2)^n$, stąd

$$A_n \geq \sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \underset{\substack{t = \cos y\\ dt = -\sin y\,dy}}{=} \underbrace{\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} y\,dy}_{\text{to obliczaliśmy przy okazji wzoru Wallisa}} = \sqrt{n}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

z drugiej strony $e^{-nt^2} = \frac{1}{(e^{t^2})^n} \le \frac{1}{(1+t^2)^n}$, więc

$$A_n \le \sqrt{n}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \underset{\substack{t=\operatorname{tg} y\\ dt=\frac{1}{\cos^2 y}dy}}{=} \sqrt{n}\int_0^{\pi/4}\cos^{2n-2}y\,dy$$

$$\le \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}y\,dy \underset{\substack{y=\frac{\pi}{2}-s\\ dy=-ds}}{=} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}y = \sqrt{n}\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$L_n = \sqrt{n}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \le A_n \le \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{n}\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = P_n$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n \le \lim_{n\to\infty} A_n \le \lim_{n\to\infty} P_n$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,4^n\overbrace{\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}\right)^2}^{\to 1}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\to 1}\cdot\frac{2\pi n\,(n/e)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{n}{2n+1}}}_{\to 1/\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}}_{=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\to\frac{1}{e}}\cdot e = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\,\underbrace{\frac{(2n)!}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{4^n}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}{n!}\right)^2}_{\to 1}\cdot\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{(2n/e)^{2n}}{(2n/e)^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

a zatem $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ostatecznie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

<u>Uwaga</u>: Przy obliczaniu całek niewłaściwych możemy korzystać z wzorów na całkowanie przez części i przez podstawienie, trzeba tylko pamiętać, że ~~o~~ w rzeczywistości mamy do czynienia nie z całką, ale z granicą całek, więc np

$$\int_a^\infty f(t)g'(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(t)g(t)\,dt$$

$$f(t)g(t)\Big|_a^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t)g(t) - f(a)g(a).$$

<u>Dowód</u>: korzystamy z odp. wzoru na mniejszym przedziale (w pow. przykładzie na $[a,b]$), a potem przechodzimy z końcami przedziału do odp. granicy (w przykładzie — z $b$ do $\infty$).

## Funkcja $\Gamma$ Eulera

<u>Def</u>: Dla $a>0$
$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$$

<u>Uwaga</u>: ta całka jest wprawdzie całką niewłaściwą (dla $a\in(0,1)$ w obu końcach) ale funkcja podcałkowa jest dodatnia, więc całka istnieje, & a co więcej $t^{a-1}e^{-t} < t^{a-1}$, skąd

$$\int_0^1 t^{a-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{a-1}\,dt = \frac{t^a}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{a}$$

a dla $t\geq 1$ niech $k > a-1$, wtedy

$$t^{a-1} \le \left(\tfrac{t}{2}\right)^k\cdot 2^k = \frac{(t/2)^k}{k!}\cdot 2^k\cdot k! \le e^{t/2}\cdot 2^k\cdot k!$$

i
$$\int_1^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt \le \int_1^\infty e^{t/2}\cdot 2^k\cdot k!\,e^{-t}\,dt = 2^k k!\int_1^\infty e^{-t/2}\,dt =$$

$$= -2e^{-t/2}\cdot 2^k\cdot k!\Big|_1^{\infty} = \cancel{12}\cdot 2e^{-1/2}\cdot 2^k\cdot k! < \infty .$$

**Twierdzenie**: (o własnościach funkcji $\Gamma$)

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ dla $a > 1$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$

**Dowód**:
$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} t^a(-e^{-t})'\,dt =$$
$$= -t^a e^{-t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} a t^{a-1} e^{-t} =$$
$$= 0 - 0 + a\Gamma(a).$$

ostatni wzór – oczywista indukcja z dwóch poprzednich wzorów.

**Twierdzenie**: $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**Uwaga**: to pozwala wyznaczyć wartości $\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

**Dowód**:
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt \underset{\substack{x=\sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ dt = 2x\,dx}}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2}\cdot 2x\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

wzór Poissona