Długość krzywej

Krzywa to $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ciągła i różnowartościowa (nie chcemy samoprzecięć).

Jak obliczać długość krzywej? Jak tę długość zdefiniować?

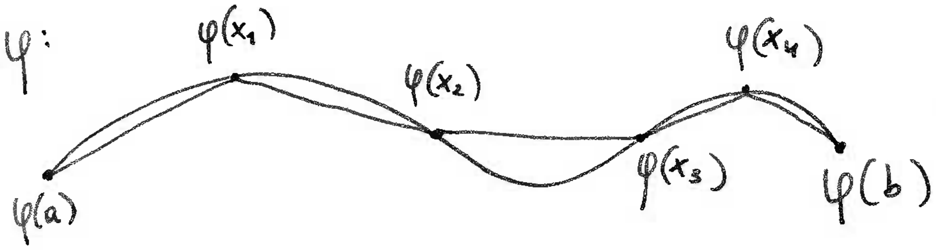
Umiemy to zrobić dla szczególnej klasy krzywych – dla łamanych

l:

$$d(l) \stackrel{def}{=} \|z_1 - z_0\| + \|z_2 - z_1\| + \ldots + \|z_4 - z_3\|$$

A jeżeli φ (a precyzyjniej – jej obraz) nie jest łamaną?

φ:



wpisujemy w krzywą φ łamaną l.

Jest intuicyjnie zrozumiałe, że:

1. długość łamanej l jest nie większa niż (jakkolwiek, byle sensownie zdefiniowana) długość φ
2. Z łamaną l związany jest podział $\nu = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_4, x_5 = b\}$

I ogólnie – łamaną wpisaną w krzywą φ możemy utożsamić z pewnym podziałem ν odcinka $[a,b]$

3. Jeżeli μ jest podziałem powstałym przez rozdrobnienie podziału ν, to odpowiadająca mu łamana l_μ ma długość nie mniejszą, niż łamana l_ν. (nierówn. Δ)

(4) Im mniejszą średnicę ma podział ν, tym lepiej długość łamanej l_ν przybliża to, co chcielibyśmy nazywać długością krzywej φ.

Def: Długością krzywej $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ nazywamy supremum długości łamanych wpisanych w tę krzywą, a więc

$$d(\varphi) = \sup_{\substack{\nu - \text{podział } [a,b] \\ \nu = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ x_0 = a,\ x_n = b}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(x_i) - \varphi_1(x_{i-1}))^2 + (\varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}))^2 + \dots}$$

gdzie $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$

Ustalmy dla uproszczenia $m=2$ (a więc ograniczmy się do krzywych płaskich); rachunki dla krzywych w wyższych wymiarach są dokładnie takie same, tylko zajmują więcej miejsca.

Załóżmy, że $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jest funkcją klasy C^1 (tj. φ_1 i φ_2 są różniczkowalne i ich pochodne są ciągłe. Mamy wówczas

Twierdzenie Jeżeli $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jest różnowartościowa i klasy C^1, to $d(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}\, dx$

Podział μ będzie rozdrobnieniem podziału ν o dostatecznie małej średnicy $\delta(\mu)$. Zacznijmy od ustalenia, jak drobnym podziałem ma być μ.

Dla ustalonego wcześniej $\varepsilon>0$ możemy dobrać $\delta_1>0$ takie, że dla dowolnego podziału $\varkappa$ z jakimkolwiek punktowaniem o ile tylko $\delta(\varkappa)<\delta_1$, mamy $\left|I - S(\nu, \varkappa, \cdot)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wiemy też, że φ_2' jest ciągła na $[a,b]$ – a więc jest jednostajnie ciągła; $\exists_{\delta_2>0} \ \forall_{x,y\in[a,b]} \ |x-y|<\delta_2 \Rightarrow |\varphi_2'(x)-\varphi_2'(y)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

Wybierzmy więc jakiekolwiek rozdrobnienie μ podziału ν takie, że $\delta(\mu)<\min(\delta_1,\delta_2)$; $\mu=\{y_0,y_1,\dots,y_n\}$

Wykażemy, że

$$d(l_\mu)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi_1'(y_i)-\varphi_1'(y_{i-1}))^2+(\varphi_2'(y_i)-\varphi_2'(y_{i-1}))^2} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\zeta_i)^2}\,(y_i-y_{i-1}) \qquad \xi_i,\zeta_i\in(y_{i-1},y_i)$$

O ile $d(l_\mu)$ różni się od $S(\nu,\mu,\xi)$?

$$S(\nu,\mu,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\xi_i)^2}\,(y_i-y_{i-1})$$

stąd

$$|d(l_\mu)-S(\nu,\mu,\xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\zeta_i)^2}-\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\xi_i)^2}\right](y_i-y_{i-1})\right|$$

Oszacujmy pojedynczy wyraz w nawiasie kwadratowym:

$$\left|\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\zeta_i)^2}-\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2+\varphi_2'(\xi_i)^2}\right| \; (*) \le ?$$

Jeżeli oba pierwiastki są $=0$ (a więc $\varphi_1'(\xi_i)=\varphi_2'(\xi_i)=\varphi_2'(\zeta_i)=0$) to oczywiście $(*) \le \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Jeżeli zaś któryś z pierwiastków jest $\neq 0$, to

Dowód:

Rozważmy dowolny podział ν odcinka $[a,b]$;
$\nu = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$d(l_\nu) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(x_i)-\varphi_1(x_{i-1}))^2 + (\varphi_2(x_i) - \varphi_2(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2} =$$

tw. Lagrange'a o wart. średniej

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2}\,(x_i - x_{i-1}) \qquad \xi_i, \zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Powyższy napis przypomina sumę całkową dla funkcji $\sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}$, ale niestety mamy w każdym z przedziałów nie jeden, ale DWA punkty pośrednie: ξ_i i ζ_i. To trochę komplikuje rachunki.

Postępimy następująco: Oznaczmy $I = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}\, dx$

$\nu(x) = \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wykażemy, że podział ν można tak rozdrobnić do podziału μ, że

(1) $d(l_\nu) \overset{\text{n.}\Delta}{\leq} d(l_\mu) \leq I + \varepsilon$

oraz że (2) $|I - d(l_\mu)| < \varepsilon$.

dla dowolnego podziału ν!

Przechodząc w (1) z ε do 0 dostaniemy $d(l_\nu) \leq I$, a z (2) widzimy, że są łamane wpisane w φ, których długości są dowolnie bliskie I. Stąd

$$\sup_\nu d(l_\nu) = I.$$

$$(*) = \left| \frac{\varphi_2'(\xi_i)^2 - \varphi_2'(\zeta_i)^2}{\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2} + \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\xi_i)^2}} \right| \leq$$

$$\leq |\varphi_2'(\xi_i) - \varphi_2'(\zeta_i)| \underbrace{\left| \frac{|\varphi_2'(\xi_i)| + |\varphi_2'(\zeta_i)|}{\sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\zeta_i)^2} + \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\xi_i)^2}} \right|}_{\text{tu oczywiście mianownik jest nie mniejszy od licznika}}$$

$$\leq |\varphi_2'(\xi_i) - \varphi_2'(\zeta_i)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \text{bo } |\xi_i - \zeta_i| < \delta(\mu) \leq \delta_2 .$$

Ostatecznie $\displaystyle |d(l_\mu) - S(v,\mu,\xi)| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot (y_i - y_{i-1})$

$$= \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{4}$$

Stąd (2) $|d(l_\mu) - I| \leq |d(l_\mu) - S(v,\mu,\xi)| + |S(v,\mu,\xi) - I|$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon .$$

W szczególności $d(l_\mu) < I + \varepsilon$. (1)

<u>Wniosek</u>: Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Długość wykresu f to $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

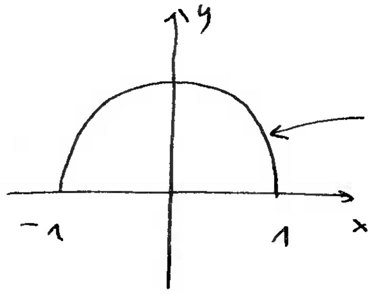
<u>Dowód</u>: Wykres to krzywa dana przez

$$\varphi(x) = (\underset{\varphi_1(x)}{x}, \underset{\varphi_2(x)}{f(x)});$$

Stosujemy powyższe twierdzenie.

Przykład: Długość okręgu jednostkowego

1. sposób



wykres $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(bo $x^2+y^2=1$)

Długość tego wykresu od -1 do 1 to połowa okręgu, więc jeżeli długość okręgu oznaczymy przez L, mamy

$$L = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\substack{x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt}}{=} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{\cos t}\,dt}{\cancel{\cos t}} =$$

$x=-1 \Rightarrow \cancel{\sin}\ t=-\frac{\pi}{2}$

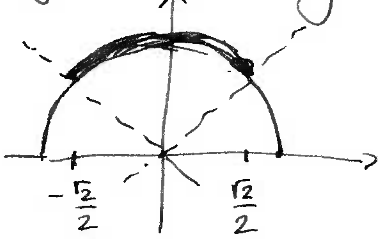
$x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x^2} \\ f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (f'(x))^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \\ 1+f'(x)^2 = \dfrac{1-x^2+x^2}{1-x^2} = \\ = \dfrac{1}{1-x^2} \end{cases}$$

$= 2\pi$. Dobry wynik, ale po drodze oszustwo! Funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nie jest ograniczona na $(-1,1)$, nie jest więc w tym przedziale całkowalna! ~~Do~~ tego typu kłopotami zajmiemy się na następnym wykładzie

2. sposób:

Zamiast ~~ła~~ obliczać długość półokręgu możemy obliczyć długość jego ćwiartki:



$$L = 4\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t\,dt}{\cos t} = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

3. sposób Możemy skorzystać z twierdzenia, a nie jedynie z wniosku: okrąg to krzywa dana wzorem (parametryzacją)

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]$$

(tu znów minimalne oszustwo: tak wybrane φ nie jest różnowartościowe – $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ – – ale ten jeden punkt nie ma znaczenia, gdy obliczamy długość okręgu; możemy zresztą sparametryzować pół okręgu biorąc $t \in [0, \pi]$).

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(lub, by uniknąć kłopotów z nieróżnowartościowością:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} dt = 2\pi$$).