Dwie dość oczywiste, pomocnicze definicje:

Wielomianem dwóch zmiennych x, y nazywamy funkcję $(x,y) \longmapsto a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x)$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są wielomianami zmiennej x.

Funkcją wymierną dwóch zmiennych x, y nazywamy funkcję $(x,y) \longmapsto \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, gdzie P i Q są wielomianami dwóch zmiennych x, y.

Całkowanie wyrażeń trygonometrycznych

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną od funkcji $\sin x$ i $\cos x$ to zawsze można ją zamienić poprzez odpowiednie podstawienie w całkę z funkcji wymiernej.

Podstawienie, które zawsze działa w takiej sytuacji (choć często nie jest najprostszą z możliwych dróg), nazywane podstawieniem uniwersalnym, to wprowadzenie $t = \tan\frac{x}{2}$. Zauważmy bowiem, że przy takim podstawieniu możemy wyrazić $\sin x$ i $\cos x$ jako funkcje wymierne zmiennej t:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Mamy też $2\,\mathrm{arctg}\, t = x$, więc $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$.

Zatem jeżeli f jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, to $\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$

Przykład:

$$\int \frac{\sin x}{\operatorname{tg}x+1}\,dx = \int \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}+1}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = (*)$$

Podst. uniwersalne: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$(*) = \int \frac{\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{2t+1-t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{2\,dt}{t^2+1} = \int \frac{4t(t^2-1)}{(t^2+1)^2(t^2-2t-1)}\,dt$$

i to już umiemy scałkować

albo trochę sprytniej:

$$(*) = \int \frac{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)\,dx}{\sin^2 x-\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x\cos x}{2\sin^2 x-1}\,dx - \int \frac{\sin x\cos^2 x\,dx}{1-2\cos^2 x} =$$

$$= I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int \frac{y^2\,dy}{2y^2-1} \qquad y=\sin x,\quad dy=\cos x\,dx$$

$$I_2 = -\int \frac{z^2\,dz}{1-2z^2} = \int \frac{z^2\,dz}{2z^2-1} \qquad z=\cos x,\quad dz=-\sin x\,dx$$

Jeżeli więc $F(t) = \int \frac{t^2\,dt}{2t^2-1}$, to $\int \frac{\sin x}{\operatorname{tg}x+1} = F(\sin x) - F(\cos x) + C$

Całkowanie wyrażeń z pierwiastkami

1. Pierwiastki z wielomianu stopnia 1.

Załóżmy, że funkcja podcałkowa jest postaci $f(x, \sqrt{ax+b})$, gdzie f jest funkcją wymierną dwóch zmiennych. Podstawienie $t = \sqrt{ax+b}$ sprowadzi ~~to~~ całkę do całki z funkcji wymiernej:

$$x = \frac{t^2-b}{a} \qquad dx = \frac{2}{a}t\,dt$$

$$\int f(x,\sqrt{ax+b})\,dx = \int f\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\cdot\frac{2}{a}t\,dt.$$

Przykład:

$$\int \frac{2x-1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x+1}\\ x=t^2-1\\ dx=2t\,dt}}{=} \int \frac{(2t^2-3)\cdot 2t}{t^2+t-1}\,dt$$

i dalej rozkładamy na ułamki proste itd.

2. Pierwiastki z wielomianu kwadratowego

Teraz będziemy całkować funkcję $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, gdzie f jest funkcją wymierną dwóch zmiennych.

Zauważmy najpierw, że jeżeli $a<0$ i $\Delta = b^2-4ac<0$, to wyrażenie pod pierwiastkiem jest ujemne dla każdego $x\in\mathbb{R}$, nie ma więc sensu (póki nie nauczymy się całkować funkcji zespolonych, ale to zupełnie inna historia).

Załóżmy zatem, że zachodzi jeden z trzech przypadków:
① $a<0$, $\Delta>0$
② $a>0$, $\Delta>0$
③ $a>0$, $\Delta<0$

Zagadka: dlaczego nie interesują nas przypadki z $\Delta=0$?

Wykażemy, że poprzez liniową zamianę zmiennych możemy sprowadzić ax^2+bx+c do
w przypadku
① : $\tilde{a}(1-y^2)$
② : $\tilde{a}(y^2-1)$
③ : $\tilde{a}(y^2+1)$
i $\tilde{a}>0$.

Dowód: uzupełniamy do kwadratu:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = \frac{\Delta}{4a}\left[\frac{4a^2}{\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-1\right]$$

$$= \frac{\Delta}{4a}\left[\operatorname{sgn}\Delta\cdot\left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x+\frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2-1\right] = (*)$$

w przypadku ① $\frac{\Delta}{4a} < 0$, $\operatorname{sgn} \Delta = 1$, otrzymujemy więc

$$(*) = \frac{\Delta}{4|a|}\left(1 - \left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2\right) = \tilde{a}\,(1-y^2)$$

$$\tilde{a} = \frac{\Delta}{4|a|} \qquad y = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}$$

w przypadku ②: $\frac{\Delta}{4a} > 0$, $\operatorname{sgn} \Delta = 1$,

to samo podstawienie co w przypadku ① daje nam $(*) = \tilde{a}(y^2-1)$

w przypadku ③ $\frac{\Delta}{4a} < 0$, $\operatorname{sgn} \Delta = -1$

$$(*) = \frac{|\Delta|}{4a}\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2 + 1\right]$$

$$\tilde{a} = \frac{|\Delta|}{4a} > 0, \qquad y = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}$$

Załóżmy teraz, że chcemy scałkować $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Przedstawię 3 różne sposoby sprowadzenia takiej całki do całki z funkcji wymiernej. Potrzebuję jednak najpierw dwóch nowych funkcji – tzw. funkcji hiperbolicznych

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{sinus hiperboliczny}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{cosinus hiperboliczny}$$

Łatwo można sprawdzić, że spełniają one następujące tożsamości:

① $\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

② $(\sinh x)' = \cosh x$

③ $(\cosh x)' = \sinh x$.

Obie te funkcje są określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \cosh x \geq \cosh 0 = 0$ $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2} + 1 \geq 1 \right)$

a więc $\sinh x$ jest ściśle rosnący (bo $\forall_x (\sinh x)' > 0$)

$\sinh 0 = 0$, więc $\forall_{x>0} \sinh x > 0$, $\forall_{x<0} \sinh x < 0$

Stąd $\cosh x$ jest malejący dla $x<0$, w $x=0$ ma minimum, dla $x>0$ jest rosnący.

Wróćmy do $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

~~Metoda 1 Podstawienia~~

Załóżmy, że jesteśmy w sytuacji 1.

Stosując omówioną zamianę zmiennych możemy sprowadzić naszą całkę do $\int f_1(y, \sqrt{1-y^2})\,dy$

Metoda 1 Podstawienie hiperboliczne

$$y = \tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

tangens hiperboliczny

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1 - \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}} = \sqrt{\frac{1}{\cosh^2 t}} = \frac{1}{\cosh t}$$

$$dy = \left(\frac{\sinh t}{\cosh t}\right)' dt = \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t}\,dt = \frac{dt}{\cosh^2 t}$$

$$\int f_1(y, \sqrt{1-y^2})\,dy = \int f_1\left(\frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}\right)\frac{dt}{\cosh^2 t} =$$

$$= \underbrace{\int f_2(\sinh t, \cosh t)\,dt}_{\text{znów funkcja wym. dwóch zmiennych}} = \underbrace{\int g(e^t)\,dt}_{\text{a to już funkcja wymierna jednej zmiennej}} \underset{z=e^t}{=} \int g(z)\frac{dz}{z}$$

$dz = e^t dt = z\,dt$

$dt = \frac{dz}{z}$

Metoda 2 Podstawienie trygonometryczne

Aby $\sqrt{1-y^2}$ miało sens, y musi być z przedziału $[-1,1]$.
Przyjmijmy $y = \sin t$, umawiając się, że $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Wtedy $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } \cos t \geq 0 \\ \text{dla } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}{=} \cos t$

$dy = \cos t \, dt$

$$\int f_1(y, \sqrt{1-y^2})\, dy = \int \underbrace{f_1(\sin t, \cos t) \cos t}_{\substack{\text{funkcja wymierna} \\ \text{dwóch zmiennych: } \sin t \text{ i } \cos t}} dt$$

Takie wyrażenia umiemy już całkować.

Przykład

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = (*)$$

Podstawienie hiperboliczne: $x = \tanh y$ $\quad dx = \frac{dy}{\cosh^2 y}$
$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\cosh y}$

$$(*) = \int \frac{\cosh y \cdot \tanh^2 y \, dy}{\cosh^2 y} =$$

$$= \int \frac{\sinh^2 y}{\cosh^3 y} dy =$$

i teraz moglibyśmy pozamieniać funkcje hiperboliczne na e^x i e^{-x}, ale można sprytniej:

$$= \int \frac{\sinh^2 y \cosh y}{\cosh^4 y} dy = \int \frac{\sinh^2 y \cosh y}{(\sinh^2 y + 1)^2} dy \underset{\substack{\uparrow \\ w = \sinh y \\ dw = \cosh y \, dy}}{=}$$

$$= \int \frac{w^2 \, dw}{(w^2+1)^2}.$$

Podstawienie trygonometryczne: $x = \sin y$ $\quad dx = \cos y \, dy$ $\quad \sqrt{1-x^2} = \cos y$

$$(*) = \int \frac{\sin^2 y}{\cos y} \cos y \, dy = \int \sin^2 y \, dy = \int \frac{1-\cos 2y}{2} dy \underset{\substack{\uparrow \\ w=2y \quad dw = 2dy}}{=} \int \frac{1-\cos w}{4} dw = \frac{w}{4} - \frac{\sin w}{4} + C = \ldots$$

Przypadek 2 :

$$\int f_1\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy$$

<u>Metoda 1</u> Podstawienie hiperboliczne

$y = \cosh t$ $\quad \sqrt{y^2-1} = \sqrt{\sinh^2 t}$ $\quad$ i teraz kłopot: $\sqrt{\sinh^2 t} =$

$dy = \sinh t \, dt$ $\qquad$ $\sinh t$ czy $-\sinh t$?

$\sqrt{y^2-1}$ ma sens dla $y \leq -1$ i dla $y \geq 1$.

My szukamy funkcji pierwotnej do funkcji podcałkowej <u>na jakimś przedziale</u>. Przedział ten leży ALBO w półprostej $(-\infty, -1]$, ALBO w $[1, \infty)$.

Jeżeli w $(-\infty, -1]$, to $\sqrt{\sinh^2 t} = -\sinh t$

$[1, \infty)$, to $\sqrt{\sinh^2 t} = \sinh t$

$$\int f_1\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy = \int f_1(\cosh t, \pm \sinh t) \sinh t \, dt$$ i jak w przypadku 1

<u>Metoda 2</u> Podstawienie trygonometryczne

$$y = \frac{1}{\cos t} \qquad dy = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \qquad \sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 t - 1} = \sqrt{\mathrm{tg}^2 t}$$

i znów kłopot: $\sqrt{\mathrm{tg}^2 t} = \mathrm{tg}\, t$, czy $-\mathrm{tg}\, t$?

Jeżeli nasz przedział leży w $(-\infty, -1]$, to umawiamy się, że $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\mathrm{tg}\, t \leq 0$, więc $\sqrt{\mathrm{tg}^2 t} = -\mathrm{tg}\, t$

a jeżeli leży w $[1, \infty)$, to $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{tg}\, t \geq 0$, $\sqrt{\mathrm{tg}^2 t} = \mathrm{tg}\, t$.

Przykład :
$$\int \frac{x \cdot \sqrt{x^2-1}}{x+2} dx \underset{\text{podst. hiperboliczne}}{=} \pm \int \frac{\cosh y \cdot \sinh y}{\cosh y + 2} \sinh y \, dy =$$

$$= \pm \int \frac{(e^y + e^{-y})(e^y - e^{-y})^2}{8\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} + 2\right)} dx = \pm \int \frac{e^{-3y}(e^{6y} + 3e^{4y} + 3e^{2y} + 1)}{4(e^y + e^{-y}) + 16} dy =$$

$$= \int \frac{e^{6y} + 3e^{4y} + 3e^{2y} + 1}{4(e^{4y} + 4e^{3y} + e^{2y})} dy \underset{w = e^y \quad dw/w = dy}{=} \frac{1}{4} \int \frac{w^6 + 3w^4 + 3w^2 + 1}{w^4 + 4w^3 + w^2} \frac{dw}{w} = \ldots$$

$$\int \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x+2}\,dx = \pm\int \frac{\frac{1}{\cos y}\,\mathrm{tg}\,y}{\frac{1}{\cos y}+2}\,\frac{\sin y\,dy}{\cos^2 y} = \pm\int \frac{\sin y}{2\cos^2 y+\cos y}\,\cancel{dy}\,\frac{\sin y\,dy}{\cos^2 y}$$

$$= \pm\int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y(2\cos y+1)}\,dy \quad \text{i dalej } z=\mathrm{tg}\frac{y}{2}\ \dots$$

Przypadek 3

$$\int f_1(y, \sqrt{y^2+1})\,dx$$

Podstawienie hiperboliczne

$$y=\sinh t \qquad dy=\cosh t\,dt \qquad \sqrt{y^2+1}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t$$

Podstawienie trygonometryczne

$$y=\mathrm{tg}\,t \qquad dy=(1+\mathrm{tg}^2 t)\,dt \qquad \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{\cos t}$$

$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \leftarrow$ tam $\cos t>0$

Przykład

$$\cancel{\int \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-1}} \qquad \int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,dx = (*)$$

Podst. hiperboliczne: $x=\sinh y$

$$(*)=\int \frac{\sinh y\cosh y}{1+\sinh y}\,\cosh y\,dy$$

i dalej zamieniamy na $\frac{e^y\pm e^{-y}}{2}$ i kładziemy $w=e^y$, $\frac{dw}{w}=dy$

podst. trygonometryczne $x=\mathrm{tg}\,y$

$$(*)=\int \frac{\mathrm{tg}\,y\cdot\frac{1}{\cos y}}{\mathrm{tg}\,y+1}\cdot(1+\mathrm{tg}^2 y)\,dy = \int \frac{\mathrm{tg}\,y\,(1+\mathrm{tg}^2 y)}{\sin y+\cos y}\,dy$$

$$= \int \frac{\sin y\,(\cos^2 y+\sin^2 y)}{\cos^3 y\,(\sin y+\cos y)}\,dy = \int \frac{\sin y\,(\sin y-\cos y)}{\cos^3 y\,(\sin^2 y-\cos^2 y)}\,dy =$$

$$= \int \frac{\sin^2 y\cos y\;dy}{\cos^4 y\,(2\sin^2 y-1)} - \int \frac{\sin y}{\cos^2 y\,(1-2\cos^2 y)}\,dy =$$

$z=\sin y$ $\quad w=\cos y$

$$= \int \frac{z^2\, dz}{(1-z^2)^2(2z^2-1)} + \int \frac{dw}{w^2(1-2w^2)} = \dots$$

TRZECIA METODA – PODSTAWIENIA EULERA

Najpierw ~~przypomnijmy~~ zauważmy, że potrafimy sobie też poradzić z całkami

$$\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$$

gdzie f jest funkcją wymierną dwóch zmiennych i $\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} \neq 0$.

(Zagadka: co, jeżeli $\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} = 0$?)

Podstawiamy $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+e}}$, wtedy $y^2(cx+e) = ax+b$

$$x(cy^2-a) = -ey^2+b$$

$$x = \frac{-ey^2+b}{cy^2-a}$$

$$dx = \frac{-2ey(cy^2-a) + (ey^2-b)\cdot 2cy}{(cy^2-a)^2}\, dy$$

$$= \frac{2(ea-bc)y\, dy}{(cy^2-a)^2}$$

$$\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx = \int \underbrace{f\left(\frac{-ey^2+b}{cy^2-a}, y\right) \frac{2(ea-bc)y\, dy}{c(y^2-a)^2}}_{\text{funkcja wymierna zmiennej } y.}$$

Wróćmy teraz do całki

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Przypadek 1 $\quad a>0 \qquad$ I podstawienie Eulera

Przyjmijmy $y = \sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2+bx+c}$. Mamy wtedy

$$(y-\sqrt{a}\,x)^2 = ax^2+bx+c$$

$$y^2 - 2\sqrt{a}\,xy + \cancel{ax^2} = \cancel{ax^2} + bx + c \qquad x(b+2\sqrt{a}\,y) = y^2-c$$

$$x = \frac{y^2-c}{b+2\sqrt{a}\,y} \qquad dx = \frac{2y\,(b+2\sqrt{a}\,y) - (y^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(b+2\sqrt{a}\,y)^2}\,dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\,y^2 + 2by + 2\sqrt{a}\,c}{(b+2\sqrt{a}\,y)^2}\,dy$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y - \sqrt{a}\,x = y - \sqrt{a}\,\frac{y^2-c}{b+2\sqrt{a}\,y}$$

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int \underbrace{f\left(\frac{y^2-c}{b+2\sqrt{a}\,y},\ y - \sqrt{a}\,\frac{y^2-c}{b+2\sqrt{a}\,y}\right)\frac{2\sqrt{a}\,y^2+2by+2\sqrt{a}\,c}{(b+2\sqrt{a}\,y)^2}}_{\text{funkcja wymierna zmiennej } y}\,dy$$

<u>Uwaga:</u> Ten sam rezultat osiągniemy biorąc
$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x.$$

Przypadek ② $c > 0$

II podstawienie Eulera

Zauważmy, że przypadki te nie wykluczają się nawzajem!

$$y = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x}$$

wtedy $(xy+\sqrt{c})^2 = ax^2+bx+c$

$$\cancel{c} + x^2y^2 + 2\sqrt{c}\,xy = ax^2+bx+\cancel{c}$$

$$xy^2 + 2\sqrt{c}\,y = ax+b \qquad x(y^2-a) = b - 2\sqrt{c}\,y$$

$$x = \frac{b-2\sqrt{c}\,y}{y^2-a}$$

i widać, że $dx = (\text{funkcja wym. od } y)\cdot dy$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xy+\sqrt{c} = \frac{b-2\sqrt{c}\,y}{y^2-a}\cdot y + \sqrt{c}.$$

Przypadek ③ Załóżmy, że ax^2+bx+c ma 2 różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2:

$$ax^2+bx+c = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Załóżmy, że $x_1 < x_2$. Jeżeli $a < 0$, to wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne dla $x \in [x_1, x_2]$ (a więc tylko tam funkcja podcałkowa ma sens).

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}$$

$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int f_1\left(x, \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}\right)dx$$

i wiemy już, że podstawienie $y = \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}$ sprowadzi tę całkę do całki z funkcji wymiernej.

Jeżeli $a > 0$, to nasz przedział, w którym szukamy funkcji pierwotnej do funkcji podcałkowej, musi leżeć albo w $(-\infty, x_1]$, albo w $[x_2, +\infty)$.

Jeżeli leży w $(-\infty, x_1]$, to $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x_1-x)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ i znów $y = \sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ sprowadzi całkę do całki z funkcji wymiernej.

Jeżeli leży w $[x_2, +\infty)$, to $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$ i znów kładziemy $y = \sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$

Jest to III podstawienie Eulera.

Przykłady

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ możemy użyć II i III podst. Eulera.

II p.E: $y = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$$xy + 1 = \sqrt{1-x^2}$$
$$x^2y^2 + 2xy + 1 = 1 - x^2$$
$$x(y^2+1) = -2y$$
$$x = -\frac{2y}{y^2+1} \qquad dx = -\frac{2(y^2+1)-4y^2}{(y^2+1)^2}dy = \frac{2(y^2-1)}{(y^2+1)^2}dy$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\cdot\frac{1}{-\frac{2y}{y^2+1}+1}\cdot\frac{2(y^2-1)}{(y^2+1)^2}dy = \int \frac{8y^2(y^2-1)}{(y^2+1)^3(y-1)^2}dy = \int \frac{8y^2(y+1)\,dy}{(y^2+1)^3(y-1)} = \dots$$

$$\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,dx = (*)$$

I podst. Eulera

$$y = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$(x+y)^2 = x^2+1$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2+1$$

$$x = \frac{1-y^2}{2y} \qquad dx = \frac{-4y^2 - 2(1-y^2)}{4y^2}\,dy = -\frac{2y^2+1}{2y^2}\,dy$$

$$\sqrt{x^2+1} = x+y = \frac{1-y^2}{2y} + y = \frac{1+y^2}{2y}$$

$$x+1 = \frac{1-y^2}{2y} + 1 = \frac{1+2y-y^2}{2y} = \frac{2-(y-1)^2}{2y} = \frac{(\sqrt{2}-y+1)(\sqrt{2}+y-1)}{2y}$$

$$(*) = \int \frac{1-y^2}{2y}\cdot\frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{2y\cdot(2y^2+1)\,dy}{+(y-1+\sqrt{2})(y-1-\sqrt{2})\cdot 2y^2} =$$

$$= \int \frac{(1-y^4)(2y^2+1)\,dy}{4y^3(y-1+\sqrt{2})(y-1-\sqrt{2})}$$

$$= \ldots$$