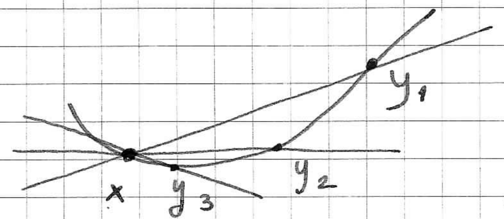
Co się dzieje z ilorazem różnicowym $I(x,y)$ gdy y jest bardzo bliskie x? Dla $y=x$ nie ma sensu ...



Ustalmy x, a zamiast y weźmy ciąg (y_n) dążący do x. Do czego dążą proste sieczne, poprowadzone przez $(x, f(x))$ i $(y_n, f(y_n))$?

Do stycznej do wykresu w x (to jest „definicja" stycznej).

Granicę $\lim\limits_{y\to x} \overbrace{\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}}^{I(x,y)}$ (o ile istnieje) nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0

Uwaga: x_0 powinien być punktem skupienia dziedziny f!
Czynność obliczania pochodnej nazywamy różniczkowaniem; jeżeli f ma w x_0 pochodną, to mówimy, że f jest w x_0 różniczkowalna.

Pochodna: ozn: $f'(x_0) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \dfrac{df}{dx}(x_0) = f_x(x_0)$

def: (różne sposoby zapisu)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{I(x,x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Przykłady

① $f(x) = C = \text{const}$
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Pochodna funkcji stałej jest funkcja 0.

Uwaga: (twierdzonko?)

Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ ma w x_0 pochodną, to jest ~~[illegible]~~ w x_0 ciągła.

Dowód:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\right]$$
$$= 0\cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0).$$

Dalsze przykłady

② $f(x) = x^n$; $n\in\mathbb{N}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + h\left(\binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3}h + \ldots + h^{n-2}\right)\right] = nx^{n-1} + 0$$
$$= nx^{n-1}$$

③ $f(x) = \exp(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\,\underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} = e^x$$
$$= \exp(x)$$

④ $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

⑤ $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\,\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

⑥ $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\,\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) = -1\cdot\sin x = \sin x.$$

<u>Twierdzenie</u> (własności arytmetyczne pochodnej)

Niech $f, g : P \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w $x \in P$.

Wówczas

a) dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcja $\alpha f + \beta g : P \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

b) funkcja $f\cdot g : P \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$ wzór Leibniza

c) jeżeli $g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g} : P\setminus\{g=0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

<u>Dowód:</u>

a) z własności arytmetycznych granicy

b) $\cancel{\lim}\ (f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\,f(x)\right]$$

$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$

m. in. z ciągłości g w x

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)}{g(x+h)\, g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

<u>Twierdzenie</u> (o pochodnej złożenia)

Niech funkcja $g: A \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $x \in A$ (w szczeg. $x \in \operatorname{Acc} A$); $f: B \to \mathbb{R}$, $B \supset g(A)$, niech będzie różniczkowalna w $\underset{(\Rightarrow g(x) \in \operatorname{Acc} B)}{g(x)}$. Wówczas $f \circ g: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x oraz

$$(f \circ g)'(x) = \cancel{f'(x)g}\ f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

<u>Dowód</u>:

Oznaczmy $r(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x)$.

Skoro g ~~róż~~ jest różniczkowalna w x, to $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$

Analogicznie $R(H) = \cancel{f(y+H) - f(y)}$

$$= \frac{f(g(x)+H) - f(g(x))}{h} - f'(g(x));$$

oczywiście $\lim\limits_{H \to 0} R(H) = 0$.

Mamy $g(x+h) = g(x) + h g'(x) + h r(h)$

$$f(g(x)+H) = f(g(x)) + H f'(g(x)) + H R(H).$$

No to

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x) + \overbrace{hg'(x) + hr(h)}^{H}) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)) + [\overbrace{hg'(x) + hr(h)}^{H}] f'(g(x)) + HR(H) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \{[g'(x) + r(h)] f'(g(x)) + [g'(x) + r(h)] R(H) =$$

$$= g'(x) f'(g(x)) \quad , \text{bo} \quad r(h) \xrightarrow{h\to 0} 0, \quad H \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

$$R(H) \xrightarrow[H\to 0]{} 0.$$

Def: Styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0, w którym f jest różniczkowalna, nazywamy prostą o wzorze $y = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ 193

Proszę zauważyć, że to dokładnie przybliżenie (najlepsze możliwe) funkcji f funkcją liniową.

(dla dowolnego $a \neq f'(x_0)$ błąd przybliżenia

$$D(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) =$$

$$= \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\right](x - x_0)$$

Dla x bliskich x_0 jest bliskie $[f'(x_0) - a](x - x_0)$ więc gdy $x \to x_0$, maleje liniowo jak $x - x_0$, a gdy

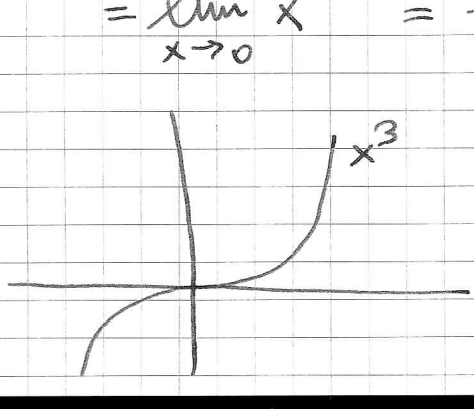
$a = f'(x_0)$, to maleje szybciej.

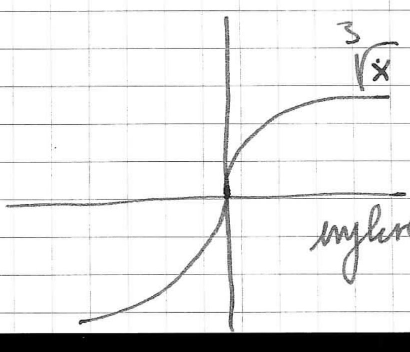
<u>Uzupełnienie</u>: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3} x^{-2/3}$;

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x^{-2/3} = +\infty.$$

Co z wykresem?





wykres pionowy!

Uwaga 1. f różniczkowalna w $x_0 \iff$ istnieje $a \in \mathbb{R}$ tż. jeżeli $g(h) = f(x_0+h) - \cancel{h}\, f(x_0) - ah$, to $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$. 194

($\Rightarrow$) wystarczy wziąć $a = f'(x_0)$, wtedy

$$\frac{g(h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

$$\downarrow h \to 0$$

$$f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

($\Leftarrow$) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{g(h)}{h} + a \to 0 + a = a$, więc $a = f'(x_0)$.

Uwaga 2. Liczba a z poprzedniej uwagi jest wyznaczona jednoznacznie (jeżeli istnieje, to f różn. w x_0 i $a = f'(x_0)$).

Oznaczając $r(h) = \frac{g(h)}{h}$ ~~mamy~~ i $x = x_0 + h$, $h = x - x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{przybliżenie } f \text{ funkcją} \\ \text{liniową zmiennej } x}} + \underbrace{\underbrace{r(x-x_0)}_{\text{to dąży do 0 gdy } x \to x_0.}\cdot(x-x_0)}_{\text{błąd tego przybliżenia.}}$$

Przypomnienie: Sieczna poprowadzona przez ~~$(x, f(x))$ i $(y_0, f(y_0))$~~ $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ ma wzór

$$y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

Gdy $x_1 \to x_0$ (sieczna zbliża się do stycznej), dostajemy wzór stycznej.

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Załóżmy, że $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$, ma funkcję odwrotną $f^{-1}: f((a,b))\to\mathbb{R}$ i f^{-1} jest ciągła w $f(x_0)$. Załóżmy dodatkowo, że $f'(x_0)\neq 0$. Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0=f(x_0)$ i zachodzi równość

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Zauważmy, że wszystkie, poza ciągłością f^{-1} w $f(x_0)$, założenia twierdzenia są potrzebne po to, by sformułowanie twierdzenia miało sens.
Czy z tego dodatkowego założenia o ciągłości f^{-1} w $f(x_0)$ można, bez szkody dla prawdziwości twierdzenia, zrezygnować?

Zadanie 1 Niech $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ będzie dana przez

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq\frac{1}{n},\ x\neq 1-\frac{1}{n} \text{ dla } n\geq 4\\ \frac{1}{n+[\sqrt{n}]} & x=\frac{1}{n} \text{ dla } n\geq 4\\ \frac{1}{n^2+n-1} & x=1-\frac{1}{n} \text{ dla } n\geq 4.\end{cases}$$

Funkcję f możemy rozszerzyć wzorem $f(-x)=-f(x)$ do funkcji f określonej na $(-1,1)$.
Wykaż, że

(1) f jest różniczkowalna w 0, $f'(0)\neq 0$

(2) f jest różnowartościowa na $(-1,1)$, a więc ma funkcję odwrotną, określoną na $f((-1,1))$

(3) f^{-1} nie jest ciągła w $f(0)=0$.

<u>Zadanie 2</u> Czy jeżeli założymy, że f jest ciągła na (a,b), możemy zrezygnować z założenia, że f^{-1} jest ciągła w $f(x_0)$?

<u>Dowód twierdzenia</u>

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}.$$

Niech $H = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)$. Z ciągłości funkcji f^{-1} w $y_0 = f(x_0)$ wiemy, że $\lim\limits_{h\to 0} H = 0$.

Zauważmy teraz, że $f(x_0+H) - f(x_0) =$

$$= f(x_0 + f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)) - f(x_0) =$$

$$= f(\cancel{f^{-1}(y_0)} + f^{-1}(y_0+h) - \cancel{f^{-1}(y_0)}) - f(x_0) =$$

$$= f(f^{-1}(y_0+h)) - f(x_0) = y_0 + h - y_0 = h.$$

Mamy stąd

$$(f')^{-1}(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{H}{f(x_0+H) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

bo $H \xrightarrow{h\to 0} 0$.

$\square$

<u>Przykładowy zastosowania:</u>

① $\ln x$, który jest funkcją odwrotną do $\exp(x)$, jest ciągły w całej swojej dziedzinie $(0,\infty)$, więc jeżeli $y_0 = e^{x_0}$, to $(\ln)'(y_0) = \frac{1}{(\exp)'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$

(zgodnie z tym, co i tak już wiemy).

(2) funkcja $\sqrt{x}$ jest, dla $x \geq 0$, funkcją odwrotną do x^2.
Niech więc $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.
$y_0 = x_0^2 \iff x_0 = \sqrt{y_0}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \iff (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(3) Rozważmy funkcję $f(x) = \tan x$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Na tym przedziale jest to funkcja ściśle rosnąca (udowodnimy to za chwilę), a więc różnowartościowa. Funkcję odwrotną do niej nazywamy arkus-tangensem i oznaczamy arctan.
Niech $y_0 = \tan x_0$

$$(\arctan)'(y_0) = \frac{1}{(\tan)'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

$$\left\{ (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right.$$

stąd $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(4) Analogicznie zauważamy, że $\sin x$ jest różnowartościowy na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($\sin x$ przekształca ten przedział na $[-1,1]$). Funkcję odwrotną do $\sin x$ ograniczonego do tego przedziału jest $\arcsin x$ (arkus-sinus). Niech $y_0 = \sin x_0$, wówczas

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{(\sin)'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos x_0 \geq 0, \text{ więc} \\ \cos x_0 = \sqrt{1-\sin^2 x_0} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

⑤ $\cos x$ ograniczony do $[0,\pi]$ jest ściśle malejący (jak poprzednio – za chwilę zobaczymy, jak to sprawdzać); funkcja doń odwrotna to $\arccos x$. $(\arccos x)' = ?$ (ćwiczenia).

<u>Twierdzenie</u> (Fermata) Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ przyjmuje w x_0 wartość największą lub najmniejszą na (a,b). Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to $f'(x_0)=0$.

Pierre de Fermat (1601 – 1665) – francuski prawnik i matematyk – amator (na najwyższym światowym poziomie). Był radcą sądu w Tuluzie; matematyką zainteresował się podczas studiów prawniczych w Bordeaux. Twierdzenia o metodach poszukiwania ekstremów i stycznych do krzywych były jednymi z pierwszych znaczących jego wyników. Prócz geometrii zajmował się głównie teorią liczb; zawdzięczamy mu nie tylko Wielkie Tw. Fermata (bez dowodu, podanego dopiero w latach 1993–94 przez A. Wilesa) ale (z dowodem) Małe Tw. Fermata (p pierwsza, to $\forall_{a\in\mathbb{N}}\ p \mid a^p - a$) i sporo wyników dotyczących liczb pierwszych, równań diofantycznych itd. Optyka zawdzięcza mu tzw. zasadę Fermata: promień świetlny poruszający się z A do B przebiega drogę wymagającą najkrótszego czasu przebiegu – pozwala to na wyjaśnienie np. zasady załamania światła (zaproponowanej wcześniej, ~~bez~~ empirycznie, przez Kartezjusza). Jego korespondencja z Pascalem położyła podwaliny pod rachunek prawdopodobieństwa.

Dowód tw. Fermata:

Załóżmy, że f przyjmuje w $x_0 \in (a,b)$ wartość największą.

Wówczas $\forall_{x\in(a,b)} \; f(x)-f(x_0) \le 0$, zatem

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \text{ bo } \forall_{\substack{x<x_0 \\ x\in(a,b)}} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{0\,\ge}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \ge 0$$

o ile istnieje!

(ale założyliśmy różniczkowalność f w x_0).

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0, \text{ bo } \forall_{\substack{x>x_0 \\ x\in(a,b)}} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \le 0$$

Jeżeli jednak f jest w x_0 różniczkowalna, to

$$0 \le \underbrace{f'_-(x_0) = f'_+(x_0)}_{f'(x_0)} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

W przypadku, gdy f przyjmuje w x_0 wartość najmniejszą, możemy albo w oczywisty sposób zmodyfikować powyższy dowód, albo zauważyć, że wówczas $g=-f$ przyjmuje w x_0 wartość największą, zatem $\underbrace{g'(x_0)}_{-f'(x_0)} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$