20,030

Imię i nazwisko: KLUCZ

Numer albumu:

MIiM UW, część testowa egzaminu z AM I.2, 10 czerwca 2011

• czas: 60 minut •

W każdym pytaniu są trzy odpowiedzi, których poprawność należy ocenić, wpisując TAK albo NIE. Za każdą prawidłową odpowiedź TAK lub NIE zdający otrzymuje $\frac{1}{1000}$ punktu. Ponadto, za komplet 3 poprawnych odpowiedzi w danym pytaniu przyznawane są 2 punkty.

Pytanie 1. Funkcja $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły. Wiadomo, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0, 1, 2$. Wówczas

NIE (a) f ma tylko skończenie wiele ekstremów lokalnych właściwych w $(-1,1)$;

NIE (b) f przedłuża się do funkcji ciągłej na $[-1,1]$;

TAK (c) granica $\lim_{x\to 0} f(x)/(\arcsin x)^2$ istnieje i jest skończona.

Pytanie 2. Istnieje funkcja $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, dla której równanie $f(2011) = 2011 f'(x)$ ma dokładnie

TAK (a) jedno rozwiązanie w przedziale $(0, 2011)$;

TAK (b) dwa rozwiązania w przedziale $(0, 2011)$;

TAK (c) 2011 rozwiązań w przedziale $(0, 2011)$.

Pytanie 3. Jednostajnej zbieżności $f_n \rightrightarrows f$ na odcinku $[0,1]$ równoważny jest następujący warunek:

NIE (a) dla każdego $x \in [0,1]$ istnieje granica ciągu $(f_n(x))_{n=1,2,}$;

TAK (b) dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $N = N(m)$ takie, że $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ dla wszystkich $k > N$ oraz $x \in [0,1]$;

NIE (c) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $N = N(\varepsilon)$, że $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

Pytanie 4. Funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są klasy $C^1(\mathbb{R})$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ponadto $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Przy tych założeniach:

NIE (a) Funkcja f'/g' ma dla $x \to +\infty$ granicę, równą $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)/g(x)\big)$.

TAK (b) Może się zdarzyć, że dla pewnych ciągów $x_n, y_n \to +\infty$ jest $f'(x_n)/g'(x_n) \to +\infty$, natomiast $f'(y_n)/g'(y_n) \to -\infty$.

TAK (c) Może się zdarzyć, że ciąg $f'(n)/g'(n)$ ma granicę 1, a ciąg $f(n^2)/g(n^2)$ ma granicę 0.

Pytanie 5. Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to

TAK (a) jej funkcja pierwotna istnieje i spełnia warunek Lipschitza,

TAK (b) f jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

NIE (c) f ma co najmniej jedno ekstremum lokalne.

Pytanie 6. Długość krzywej $[0,1] \ni t \mapsto (t\cos t, t\sin t) \in \mathbb{R}^2$ jest

TAK (a) większa od 1;

TAK (b) mniejsza od 2;

TAK (c) równa $\sqrt{1+\xi^2}$ dla pewnego $\xi \in (0,1)$.

Pytanie 7. Jeśli suma szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest równa $3x^2/(1+x^2)$ dla wszystkich x w pewnym otoczeniu 0, to

NIE (a) Promień zbieżności tego szeregu jest nieskończony.

TAK (b) Promień zbieżności tego szeregu jest mniejszy od 3.

TAK (c) $a_1 = a_3 = 0$.

Pytanie 8. Niech $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą klasy C^1, $f(0) = g(0) = 0$. Wiadomo, że $\int_0^a f(x)\,dx > \int_0^a g(x)\,dx$ dla każdego $a > 0$. Przy takich założeniach:

NIE (a) $f(x) \geq g(x)$ dla każdego $x > 0$.

NIE (b) Długość wykresu f na przedziale $[0,1]$ jest większa, niż długość wykresu g na tym przedziale.

TAK (c) Dla każdego $a > 0$ istnieje przedział $(b,c) \subset (0,a)$ taki, że $f(x) > g(x)$ dla $x \in (b,c)$.

Pytanie 9. Całka niewłaściwa $\int_0^2 \frac{(\sin x)^p \ln(1+x)}{x^2}\,dx$

NIE (a) jest zbieżna dla $p = 0$;

NIE (b) jest rozbieżna dla $p = 1$;

TAK (c) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 0$.

Pytanie 10. Jeśli $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\exp(-t)\,dt$ dla $x > 0$, to

TAK (a) $\ln\Gamma$ jest funkcją wypukłą klasy C^1 na półprostej $(0,\infty)$.

TAK (b) Dla wszystkich dostatecznie dużych n jest $\Gamma(n+1) > (n/3)^n$.

NIE (c) Dla wszystkich dostatecznie dużych n jest $\sqrt[n]{\Gamma(n+1)} < n/e$.