ale $f_n \not\rightrightarrows 0$. Gdyby bowiem $f_n \rightrightarrows 0$, to

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

w szczególności dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2n}$

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |\underbrace{f_n(\tfrac{1}{2n})}_{=1} - \underbrace{f(\tfrac{1}{2n})}_{=0}| < \frac{1}{2} \quad \lightning$$

$$1 < \frac{1}{2}.$$

Jednostajny warunek Cauchy'ego

Twierdzenie: Ciąg (f_n) jest jednost. zbieżny (do jakiegoś f) na A, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} \forall_{x\in A} \ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

(jednost. war. Cauchy'ego).

Dowód:

$\Rightarrow$ wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in A} \ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Wybieramy n i m większe od n_0.

Mamy $\forall_{x\in A}$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le |f_n(x)-f(x)| + |f_m(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$

skoro (f_n) spełnia jednost. warunek Cauchy'ego, to w szczególności $\forall_{x\in A}$ ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia (zwykły) war. Cauchy'ego $\Rightarrow$ jest zbieżny; oznaczmy $\lim_{m\to\infty} f_m(x) =: f(x)$

Wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n,m>n_1} \forall_{x\in A} \ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Przejdźmy z m do ∞. Z ciągłości modułu i tego, że $f_m(x) \xrightarrow{m\to\infty} f(x)$

mamy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1} \forall_{n>n_1} \forall_{x\in A} \ |f_n(x)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

czyli $f_n \rightrightarrows f$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na zbiorze A, jednostajnie zbieżnym do f. Wówczas f jest ciągła na A.

<u>Dowód</u>: Ustalmy $x \in A$.

Czy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y\in A} \; |x-y|<\delta \overset{?}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|<\varepsilon$?

Wybierzmy $\varepsilon>0$ i ustalmy n_0 takie, by

$$\forall_{n>n_0} \forall_{z\in A} \; |f_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Weźmy teraz $m>n_0$. Funkcja f_m jest ciągła w x, więc istnieje $\delta>0$ takie, że

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f_m(x)-f_m(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatem

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-f_m(y)|+$$
$$+|f_m(y)-f(y)| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Kryterium Weierstrassa

Jeżeli $\forall_{x \in A}$ $|f_n(x)| \leq a_n$ oraz szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na A.

Dowód

Wykażemy, że ciąg sum częściowych $S_m = \sum_{k=0}^{m} f_k$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego.

Wiemy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny - a więc możemy dla każdego $\varepsilon > 0$ znaleźć n_0 takie, że dla $m > n > n_0$ $\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$.

Mamy wówczas $\forall_{x \in A}, \forall_{m > n > n_0}$

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon$$

a więc, jak chcieliśmy, S_m spełnia jednost. warunek Cauchy'ego, co oznacza, że szereg $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny. □

Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest jednostajnie zbieżny na $[a, \infty)$ dla $a > 1$. $\left(\forall_{x \in [a,\infty)} \ \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}\right)$

Twierdzenie (o różniczkowaniu szeregu potęgowego wyraz po wyrazie).

Niech funkcja $F(x)$ będzie dana szeregiem potęgowym o dodatnim promieniu zbieżności R:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad \text{dla } x \in (x_0-R, x_0+R).$$

Wówczas funkcja F jest różniczkowalna w (x_0-R, x_0+R), przy czym

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Uwaga: Korzystając z ~~tez~~ wzoru Hadamarda łatwo można sprawdzić, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ też jest równy R; podobnie szeregi $\sum n^k a_n (x-x_0)^n$ dla dow. k.

Dowód: Załóżmy dla uproszczenia zapisu, że $x_0 = 0$.

Wiemy, że jeżeli $d>0$ jest takie, by

$(x-d, \; x+d) \subset (-R, R)$ i $|h|<d$, to

szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

są bezwzględnie zbieżne (jako szer. potęgowe wewnątrz ~~prze~~ przedziału zbieżności).

Oszacujmy

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}}{h} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^{k-2}$$

$$\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} |x|^{(n-2)-(k-2)} |h|^{k-2} = |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 (|x|+|h|)^{n-2}$$

bo $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \leq n^2 \binom{n-2}{k-2}$

$$\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 (|x|+d)^{n-2}$$

szereg $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| (|x|+d)^{n-2}$ jest, na mocy Uwagi, zbieżny, więc

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| \le |h| \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| (|x|+d)^{n-2} \right) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\square$

Wnioski:

1. $F(x)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w (x_0-R, x_0+R), w szczególności i ona sama, i jej pochodne są ciągłe w $(-R,R)$.

2. twierdzenie o jednoznaczności
Jeżeli 2 szeregi potęgowe o dodatnich promieniach zbieżności, wokół tego samego punktu x_0, są sobie równe dla każdego $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, to mają równe współczynniki.

Dowód: Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$.
$F(x)$ jest różniczkowalna w x_0, więc i ciągła w x_0,
$F(x_0) = a_0 = b_0 \Rightarrow a_0 = b_0$. Mamy też

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n-1} = \frac{F(x) - \overset{(b_0)}{a_0}}{x-x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^{n-1}$$

oba szeregi są zbieżne dla $x\in$ ~~(0,R)~~ (x_0, x_0+R), więc i na (x_0-R, x_0+R) i są równe na (x_0, x_0+R), zatem (z ciągłości ich sumy w x_0)

$$a_1 = \lim_{x\to x_0^+} \sum a_n (x-x_0)^{n-1} = \lim_{x\to x_0^+} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^{n-1} = b_1$$

itd.

(3) Jeżeli $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ dla $x\in(x_0-R, x_0+R)$, $R>0$,

to $\forall_n\, a_n = \dfrac{F^{(n)}(x_0)}{n!}$

dowód: rachunek:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pierwszy wyraz}}}{k!}\, a_k + \sum_{i=1}^{\infty} \dots (x-x_0)^i$$

skąd $F^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$.

Wiemy zatem, że szereg potęgowy o dodatnim promieniu zbieżności wyznacza funkcję nieskończenie wiele razy różniczkowalną wewnątrz. A co na końcach?

Twierdzenie (Abela) [1826] (znane już Gaussowi (1812), ale dowód Gaussa był błędny).

Załóżmy, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ma promień zbieżności R i że jest zbieżny w x_0+R. Oznaczmy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ przez $F(x)$.

Wówczas F jest ciągła w x_0+R, tj $\lim_{x\to x_0+R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Uwaga: Oczywiście analogiczne twierdzenie zachodzi w drugim końcu — x_0-R.

Dowód tw. Abela

Załóżmy dla uproszczenia, że $x_0 = 0$ i $R = 1$
(jest to równoważne wprowadzeniu nowej zmiennej
$y = \frac{x - x_0}{R}$ i rozważaniu szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n y^n$. zamiast
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.).

Mamy zatem $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in (-1,1)$;
chcemy wykazać, że $\lim_{x \to 1} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$

Zauważmy, że jeżeli $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, to, kładąc $s_{-1} = 0$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Mamy też $s = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s x^n$, więc dla $x \in (-1,1)$

$$|F(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right|$$

chcemy teraz wykazać, że dla x dost. bliskich 1 $(1 - x < \delta)$
mamy $|F(x) - s| < \varepsilon$.

Ustalamy $\varepsilon > 0$. Dobieramy teraz n_0 tak duże,
by $\forall_{n > n_0} |s_n - s| < \varepsilon/2$ (oczywiście $s_n \xrightarrow{n \to \infty} s$). Mamy zatem

$$|F(x) - s| = |1-x| \left| \sum_{n=0}^{n_0} (s_n - s) x^n \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| (1-x) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} x^n \right| =$$

$$= |1-x| \underbrace{\left| \sum_{n=0}^{n_0} (s_n - s) x^n \right|}_{\leq} + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\left| \frac{x^{n_0+1}}{\cancel{1-x}} \right|}_{\leq 1} \cancel{(1-x)} \leq |1-x| \cdot P + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| = P$. Biorąc $\delta < \frac{\varepsilon}{2P}$, $\delta < 1$, dla $x \in (1-\delta, 1)$ $\leq \varepsilon$.

<u>Wniosek:</u> $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest jednostajnie ciągła na każdym domkniętym przedziale zawartym w przedziale zbieżności szeregu

Czy możemy dostać więcej – np. (jednostronną) różniczkowalność w $x_0 \pm R$?

Niech $f(x) = \sqrt{1+x}$. Wiemy, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$; promień zbieżności tego szeregu równy jest 1.

Proszę sprawdzić, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{1/2}{n}$ jest zbieżny (do czego?), a f nie jest różniczkowalna w $x=-1$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1} \binom{1/2}{n}$ jest rozbieżny.

Kryteria Abela i Dirichleta jednostajnej zbieżności

<u>Twierdzenie</u>: Niech $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n \geq 0$ oraz $\forall_{x \in A}$ $f_n(x)$ nierosnący. Jeżeli

(A) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ jest jednostajnie zbieżny oraz funkcja f_1 jest ograniczona

lub

(D) sumy częściowe szeregu $\sum g_n$ są ograniczone, a ciąg $f_n \rightrightarrows 0$,

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ jest jednostajnie zbieżny

<u>Dowód</u>: Chcemy zbadać jednostajny warunek Cauchy'ego dla szeregu $\sum f_n g_n$, a więc wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 t.ż.

$$\forall_{m > n > n_0} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right| < \varepsilon, \text{ niezależnie od wyboru } x \in A.$$

Przywołajmy Lemat Abela o sumowaniu przez części (zeszły semestr, str. 83): jeżeli oznaczymy $s_n = \sum_{k=0}^{n} g_n$,

(w domyśle: $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_n(x)$)

to
$$\sum_{k=n+1}^{m} g_k f_k = \sum_{k=n+1}^{m} s_k (f_k - f_{k+1}) - s_n f_{n+1} + s_m f_{m+1}$$

i dalej:

$$= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(f_k - f_{k+1}) + s_n \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} (f_k - f_{k+1})}_{f_{n+1} - f_{n+2} + f_{n+2} - f_{n+3} + \ldots + f_m - f_{m+1}} - s_n f_{n+1} + s_m f_{m+1}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(f_k - f_{k+1}) + \cancel{s_n f_{n+1}} - s_n f_{m+1} - \cancel{s_n f_{n+1}} + s_m f_{m+1}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(f_k - f_{k+1}) + (s_m - s_n) f_{m+1}$$

(A): skoro $\sum g_n$ jest zbieżny jednostajnie,
to $s_k \rightrightarrows s$, więc $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{k,l>n_0} \forall_{x\in A} |s_k(x) - s_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sup f_1}$
(jednostajny warunek Cauchy'ego)

stąd

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(f_k - f_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \sum_{k=n+1}^{m} (f_k - f_{k+1}) \qquad (f_k \geq f_{k+1})$$

$$\frac{\varepsilon}{2\sup f_1}(f_{n+1}(x) - f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo $f_{n+1} - f_m \leq f_{n+1} \leq f_1$

Podobnie $|s_m - s_n| f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2\sup f_1} \cdot f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

i ostatecznie $\left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k f_k\right| < \varepsilon$, o ile tylko $m > n > n_0$.

(D) załóżmy, że $\forall_k \forall_{x\in A} |s_k| < M$. Skoro $f_n \rightrightarrows 0$,
to $\sup_{x\in A} f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, więc $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sup f_n(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)(f_k - f_{k+1})\right| < 2M \sum_{k=n+1}^{m} (f_k - f_{k+1}) = 2M(f_{n+1} - f_m)$$

$$< 2M \sup_{x\in A} f_{n+1}(x) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla } n > n_0$$

$$|s_m - s_n| f_{m+1} < 2M \sup_{x\in A} f_m(x) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla } m > n_0.$$

i w sumie, jak poprzednio, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k f_k\right| < \varepsilon$
o ile $n, m > n_0$.

<u>Wniosek:</u> Szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny na każdym odcinku domkniętym zawartym w przedziale zbieżności.

<u>Dowód:</u> Badamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ o promieniu zbieżności R. Jak w tw. Abela zamianą zmiennych $y = R^{-1}(x-x_0)$ możemy nasz szereg sprowadzić do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n \quad \text{o promieniu zbieżności } 1, \quad b_n = a_n R^n$$

<u>Ćwiczenie:</u> Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[\alpha, \beta]$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest jednost. zbieżny na $[x_0 + \alpha R, x_0 + \beta R]$. i odwrotnie, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest jednost. zbieżny na $[\gamma, \delta]$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ jest ——— " ——— na $\left[\frac{\gamma - x_0}{R}, \frac{\delta - x_0}{R}\right]$

Wystarczy więc udowodnić nasze twierdzenie dla $\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ o prom. zbieżności 1.

Niech $[\alpha, \beta]$ będzie zawarty w przedziale zbieżności. Mamy 2 możliwości:

- albo $|\alpha|, |\beta| < 1$, wtedy weźmy $c \in (\max\{|\alpha|, |\beta|\}, 1)$;

  $\forall_n \; |b_n y^n| < |b_n| c^n$, szereg $\sum b_n c^n$ jest bezwzgl. zbieżny, więc z kryt. Weierstrassa $\sum b_n y^n$ jest jednost. zbieżny

- albo $|\alpha|$ lub/i $|\beta| = 1$.

Uwaga: Jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ i na $[c,d]$, to $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b] \cup [c,d]$

(dobieramy n_0 do ε na $[a,b]$
n_1 na $[c,d]$,
to $\max(n_0, n_1)$ jest dobre na sumie).

Załóżmy, że $\beta = 1$; wykażemy że

$\sum b_n y^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$

Wynika to od razu z kryt. Abela: szereg $\sum b_n$ jest zbieżny (jednost., bo nie zależy od x), $y^n \geqslant 0$ dla $y \in [0,1]$ i $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący.

Jeżeli teraz $\alpha \in (-1,0)$, to ~~$\sum y^n b$~~ $\sum b_n y^n$ jest jednost. zbieżny na $[\alpha, 0]$ na mocy 1-go przypadku. (i w sumie, dzięki Uwadze, na $[\alpha, \beta]$)

Jeżeli zaś $\alpha = -1$, to znaczy, że $\sum b_n (-1)^n$ jest zbieżny (jednostajnie), zatem szereg

$\sum b_n (-1)^n \cdot y^n$ jest zbieżny jednost. (kryt. Abela)

$\sum b_n (-y)^n$ na $[0,1]$, skąd $\sum b_n y^n$ jest jednost. zbieżny na $[-1,0]$

D.

A więc tu może być dowolny zbiór zwarty.

Twierdzenie (Dini)

Założmy, że ciąg funkcji ciągłych f_n jest punktowo zbieżny na odcinku domkniętym I (ważna jest tylko jego zwartość) do funkcji ciągłej f i dla każdego x ciąg $f_n(x)$ jest niemalejący.

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Uwaga: Jeżeli $\forall_x$ $f_n(x)$ jest nierosnący, to $-f_n(x)$ jest niemalejący, $-f_n \to -f \xRightarrow{\text{tw Diniego}} -f_n \rightrightarrows -f$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f.$$

Dowód: Załóżmy przeciwnie - że ciąg f_n nie jest jednost. zbieżny do f. Oznacza to, że $\sup\limits_{x\in I}(f(x)-f_n(x)) \not\to 0$, a więc istnieje ciąg $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rosnący, $(\to\infty)$ taki, że $\varepsilon \leq \underbrace{f(x_{m_n}) - f_{m_n}(x_{m_n})}_{\text{to jest zawsze } \geq 0}$

(bo $\sup\limits_{x\in I}(f-f_{m_n}) \geq \varepsilon$.)

Z ciągu (x_{m_n}) wybierzmy podciąg zbieżny $(x_{m_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ do $\tilde{x}\in I$.

$f(x_{m_{n_k}}) - f_j(x_{m_{n_k}}) \geq f(x_{m_{n_k}}) - f_{m_{n_k}}(x_{m_{n_k}}) \geq \varepsilon$ dla ustalonego $j \leq m_{n_k}$

$\downarrow k\to\infty$

$f(\tilde{x}) - f_j(\tilde{x}) \geq \varepsilon$ i sprzeczność, bo $f_j(\tilde{x}) \xrightarrow{j\to\infty} f(\tilde{x})$

Twierdzenie: Niech funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą niemalejące i niech ciąg (f_n) zbiega punktowo na $[a,b]$ do funkcji f, ciągłej na $[a,b]$. (95)

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$.

Dowód: Funkcja f jest ciągła na odcinku domkniętym, jest więc na nim jednost. ciągła

$$\Rightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[a,b]} \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Dzielimy $[a,b]$ na przedziały długości mniejszej niż δ, o końcach

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b \ , \ x_i - x_{i-1} < \delta.$$

Ze zbieżności punktowej wiemy, że $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}$

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, k.$$

Wybierzmy teraz dowolne $x \in [a,b]$. Istnieje $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ takie, że $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

Zauważmy, że skoro funkcje f_n są niemalejące, czyli $\forall_{a\leq x<y\leq b} \forall_n f_n(x) \leq f_n(y)$, to przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy analogiczną nierówność dla f – a więc f również jest niemalejąca.

Skoro $\quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$

to $\quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$

oraz $\quad f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1})$

ale $|f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{3}$, więc $f_n(x_{i+1}) < f(x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{3}$

$|f(x_i) - f_n(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow f_n(x_i) > f(x_i) - \frac{\varepsilon}{3}$

a więc $f(x)$ i $f_n(x)$ leżą w przedziale $\left(f(x_i) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{3}\right)$,

a ten przedział ma długość $< \varepsilon$,

bo $f(x_{i+1}) - f(x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ (gdyż $x_{i+1} - x_i < \delta$)

Stąd $\forall_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, o ile tylko $n > n_0$,

co oznacza, że $f_n \rightrightarrows f$