[illegible]

Wielomian $T_n(x)$ nazywamy n-tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0. Jeżeli $x_0=0$, to mówimy czasem o wielomianie Maclaurina (n-tym funkcji f). Różnicę $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazywamy n-tą resztą Taylora (funkcji f w punkcie x_0).

Powyżej udowodniliśmy twierdzenie pochodzące od Peano:

<u>Tw.</u> Jeżeli f jest n-krotnie różniczkowalna w x_0, to

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + r_n(x)$$

przy czym reszta $r_n(x)$ ma tę własność, że $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

---

przy okazji wykazaliśmy, że $T_n(x)$ jest jedynym wiel. stopnia n o tej własności.

Sprawdźmy, co dostajemy jako wielomiany Taylora dla prostych funkcji:

$f(x) = x^3 \quad , x_0 = 1.$ szukamy wiel. Taylora stopnia 1, 2, 3, 4, 5 ... 61

$f(x_0) = 1$

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(x_0) = 3$

$f''(x) = 6x \qquad f''(x_0) = 6$

$f'''(x) = 6 \qquad f'''(x_0) = 6$

$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0 \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = f^{(5)}(x_0) = \ldots = 0.$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2 \qquad r_1(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

$\frac{r_1(x)}{x-1} = (x-1)(x+2) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$T_2(x) = 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 =$

$= 3x^2 - 3x + 1 \qquad r_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

$\frac{r_2(x)}{(x-1)^2} = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

$T_3(x) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 =$

$= 1 - 3x + 3x^2 + (x-1)^3 = x^3 \qquad r_3(x) \equiv 0$

$T_4(x) = T_5(x) = \ldots = x^3 \qquad r_4(x) = r_5(x) = \ldots \equiv 0.$

$f(x) = e^x, \; \cancel{4} \; x_0 = 1 \qquad f(1) = e$

$f'(x) = e^x \qquad f'(1) = e$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(1) = e$

$T_n(x) = e + e \cdot (x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$

I dobre - wiemy, że

$$e^x = e\cdot e^{x-1} = e\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} = \overbrace{e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n!}\right)}^{T_n(x)} +$$

$$+\underbrace{e\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!}}_{r_n(x)}$$

sprawdźmy, że $\frac{r_n(x)}{(x-1)^n}\xrightarrow{x\to 1} 0$. Mamy

$$r_n(x) = e\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} = (x-1)^{n+1}\cdot e\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{(n+k+1)!}}$$

zbieżny dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$ (np. D'Alembert),

dla $x\in[0,2]$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{(n+k+1)!}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x-1|^k}{(n+k+1)!} \le \underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(n+k+1)!}} = S \in \mathbb{R}$$

to jest zbieżne (i np. $< e^2$)

więc $\left|\frac{r_n(x)}{(x-1)^n}\right| \le (x-1)\cdot e\cdot S \xrightarrow[x\to 1]{} 0$

Jeżeli funkcja f jest ~~ciągła różniczkowalna~~ nieskończenie wiele razy różniczkowalna (jak np. wielomiany, e^x, $\sin x$, $\frac{1}{x}$ dla $x\neq 0$ itd), możemy mówić o wielomianie Taylora dowolnego stopnia - w naturalny sposób prowadzi to do rozpatrywania szeregu Taylora (dla $x_0=0$ - Maclaurina).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \left(\text{z umową } f^{(0)}(x)=f(x)\right)$$

Brook Taylor (1685-1731) urodził się w zamożnej rodzinie w Middlesex, w Anglii. Z domu wyniósł zamiłowanie do malarstwa i muzyki; studiował w Cambridge, niedługo po ukończeniu studiów został członkiem Royal Society (jako 27-latek - to wyjątkowe wyróżnienie). W 1714 roku został sekretarzem Towarzystwa. (był nim przez 4 lata). Zajmował się bardzo szeroką gamą zagadnień matematyczno-fizycznych, jak przepływy kapilarne, magnetyzm, metody pomiaru temperatury, wprowadził rachunek różnicowy, badał szeregi nieskończone (w tym - odkrył szereg nazwany jego nazwiskiem), zajmował się zagadnieniami astronomicznymi. Z wyników, które dopiero poznamy: wprowadził metodę całkowania przez części i badał zamiany zmiennych w całkach, udowodnił też znane nam twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej. Jego zainteresowanie sztuką przejawiło się m.in. w serii prac badających drgania struny oraz w wartościowym dziele o perspektywie liniowej.

Colin Maclaurin (1698-1746) był synem ~~szkockiego~~ pastora w małej wsi w zachodniej Szkocji. Jego ojciec nie był byle wiejskim proboszczem - przetłumaczył m.in. Psalmy na gaelic, zmarł jednak przed narodzeniem Colina; gdy ów miał 9 lat, odumarła go również matka; dalej wychowywał go stryj (również pastor). Jedenastoletni Colin został studentem Uniwersytetu w Glasgow; tytuł magistra sztuk (odpowiednik dzisiejszego licencjatu) uzyskał 3 lata później, na podstawie pracy o teorii grawitacji. Studiował przez jakiś czas teologię, porzucił jednak plany pójścia w ślady ojca i stryja. Jako 19-latek wygrał konkurs na stanowisko profesorskie w Aberdeen. Dwukrotnie odwiedził Londyn, gdzie poznał Newtona, został również wybrany członkiem Royal Society. Dwa lata spędził jeżdżąc po Francji, zdobył tam nagrodę Akademii Nauk za pracę o zderzeniach ciał. Dzięki poparciu Newtona przeniósł się z Aberdeen na uniwersytet w Edynburgu, gdzie spędził resztę życia. Po raz drugi zdobył nagrodę Akademii Nauk za pracę o przypływach (do spółki z L. Eulerem i D. Bernoullim). W 1742 wydał dwutomowe „Treatise of fluxions" – systematyczny wykład rachunku różn. à la Newton. – tam też pojawiła się szczególna postać szeregu Taylora, którą dziś nazywamy szeregiem Maclaurina, a także wiele zastosowań rachunku różn. i całkowego. Jest też jednym z ojców nauk aktuarialnych – opisał matematyczne procedury działania dla towarzystwa ubezpieczeniowego opiekującego się wdowami i sierotami po szkockich pastorach. Był bardzo dobrym wykładowcą i sympatycznym, lubianym człowiekiem.

Wnioski z wzoru Taylora:

Def: f ~~różniczk~~ ciągła w x_0 ma w x_0 punkt przegięcia, jeżeli:

1. f ma w x_0 pochodną (być może nieskończoną)
2. z jednej strony x_0 f jest (na pewnym przedziale) wklęsła, ~~ato~~ z drugiej – wypukła
3. f nie jest liniowa na żadnym odcinku otwartym zawierającym x_0.

Twierdzenie: (o lokalnych ekstremach)

Niech f będzie n-krotnie różniczkowalna w x_0 oraz $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)$,

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Wówczas
- jeżeli n jest nieparzyste, to f nie ma w x_0 lokalnego ekstremum
- jeżeli n jest parzyste, to ma lok. ekstremum; jeżeli $f^{(n)}(x_0)>0$, to jest to minimum, jeżeli $f^{(n)}(x_0)<0$, to maksimum.

Dowód: Mamy
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)=$$
$$=f(x_0)+(x-x_0)^n\left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{ustalona liczba}}+\underbrace{\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}}_{\xrightarrow{x\to x_0} 0}\right]$$

Dla x dost. bliskich x_0 nawias kwadr. ma ten sam znak, co $f^{(n)}(x_0)$.
~~Jeżeli teraz n nieparzyste, to~~ $\operatorname{sgn}(f(x)-f(x_0))=$

$= \mathrm{sgn}\,(x-x_0)^n \cdot \mathrm{sgn}[\ \ ] = \mathrm{sgn}\,(x-x_0)^n\, \mathrm{sgn}\, f^{(n)}(x_0)$

Jeżeli n nieparzyste, to $\mathrm{sgn}\,(x-x_0)^n = \mathrm{sgn}\,(x-x_0)$
zmienia się przy przejściu x przez x_0, więc
~~z jeśli~~ dla x z jednej strony x_0 mamy $f(x)-f(x_0)>0$,
z drugiej $f(x_*)-f(x_0)<0$.

Jeżeli n parzyste, to (dla $x \neq x_0$)

$$\mathrm{sgn}(x-x_0)^n\,\mathrm{sgn}\, f^{(n)}(x_0) =$$
$$= \mathrm{sgn}\, f^{(n)}(x_0)$$ i różnica $f(x)-f(x_0)$
ma ustalony znak w otoczeniu x_0.

Wzór Taylora

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x;x_0)$$

gdzie o $r_n(x;x_0)$ wiemy tyle, że $\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Przykład zastosowania: obliczanie granic

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\left[\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]^2}{\sin x\cdot(\cos x-1)^2} = ?$$

de l'Hôpital? masakra.

Ale: $\ln(1+t) = t + r_1(t)$ $\qquad \frac{r_1(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$\sin \cancel{x}\, t = t + \cancel{t}\, r_2(t)$ $\qquad \frac{r_2(t)}{t} \to 0$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + r_3(t)$ $\qquad \frac{r_3(t)}{t^2} \to 0$

skąd

$$\frac{\sqrt{x}\left[\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\right]}{\sin x\cdot(\cos x-1)^2} = \frac{x^{1/2}\cdot\left(\frac{x}{2}+r_1\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(x+r_2(x)\right)\left(-\frac{x^2}{2}-r_3(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{x^{1/2}\cdot\left(\frac{x^2}{4}+x\,r_1\left(\frac{x}{2}\right)+r_1^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(x+r_2(x)\right)\left(\frac{x^4}{4}+x^2 r_3(x)+r_3^2(x)\right)} = \frac{\cancel{x^{5/2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{r_1\left(\frac{x}{2}\right)}{x/2}}_{\to 0}+\frac{1}{4}\underbrace{\frac{r_1^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2/4}}_{\to 0}\right)}{\underbrace{\cancel{x^5}}_{x^{5/2}\to 0^+}\left(1+\underbrace{\frac{r_2(x)}{x}}_{\to 0}\right)\left(\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{r_3(x)}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{r_3^2(x)}{x^4}}_{\to 0}\right)}$$

$= +\infty.$

Zauważmy, że jedyne co nas interesowało w resztach r_1, r_2, r_3 to to, przez jakie potęgi argumentu można je podzielić, by dążyły do 0.

<u>Def</u>: Piszemy, że $f = o(g)$, jeżeli $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ $\qquad$ f, g – funkcje na otoczeniu x_0

Np we wzorze Taylora $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$

Analogicznie

$$f = O(g) \text{, gdy } \frac{f}{g} \text{ jest ograniczone w otoczeniu}$$
punktu x_0.

Symbole te nazywane są czasem symbolami Peano.

Obliczmy jeszcze, korzystając z nowej notacji

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^a} \quad \text{w zależności od } a \in \mathbb{R}.$$

Mamy $\sin x = x + o(x^2)$

$\ln(1+x) = \cancel{x + o(x)}\ x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin(\ln(1+x)) = \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x + o(x^2)\right) =$

$= x + o(x^2) - \frac{(x + o(x^2))^2}{2} + \underbrace{o\left((x + o(x^2))^2\right)}_{= o(x^2)} =$

$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

czyli $\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x) = o(x^2)$

i po podzieleniu przez x^a dla $a \le 2$ będzie dążyć do 0 – ale nic więcej nie wiemy – bo za wcześnie urwaliśmy szeregi Taylora.

Uwaga: Jeżeli $\frac{f(x)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2} \xrightarrow{x\to 0^+} 0$,

to $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2} \cdot \boxed{\frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{x^2}} \to 0$

więc $o\left(\left(x - \ldots\right)^2\right) = o(x^2)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\sin(\ln(1+x)) = \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) -$

$- \frac{(x + o(x))^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\ln(\cancel{\sin}\ 1 + \sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \cancel{\ln(}\, x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{(x + o(x^2))^2}{2}$

$$+\frac{(x+o(x))^3}{3}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

i znów się redukuje. No to dopiszmy wyrazy stopnia 4.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$$

$$\sin(\ln(1+x))=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3}{6}+o(x^4)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^4}{12}+o(x^4)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\cancel{\frac{x^4}{4}}+\cancel{\frac{3x^4}{12}}+o(x^4)$$

$$\ln(1+\sin x)=\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-$$

$$-\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{2}+\cancel{\frac{(x+o(x^2))^3}{4}}\;\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{3}+\frac{(x+o(x))^4}{4}=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{5}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\frac{\sin(\ln(1+x))-\ln(\sin(1+x))}{x^a}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\begin{cases}0 & a<4\\ -\frac{5}{12} & a=4\\ -\infty & a>4\end{cases}$$

$$\|$$

$$\frac{-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)}{x^a}=-\frac{5}{12}x^{4-a}+o(x^{4-a})$$

Pisałem, że wzór Taylora sugeruje (szczególnie zastosowany do e^x czy $\sin x$), że warto badać szeregi Taylora, tj szeregi postaci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Jeżeli $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, to $S_n(x) \equiv T_n(x)$,

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \ , \ r_n(x) = o\left((x-x_0)^k\right)$$

Ale co się dzieje z $r_n(x)$, gdy $n \to \infty$? (a nie $x \to x_0$) czy dąży do 0? Innymi słowy: czy $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$?

To zależy od funkcji. Dla e^x tak jest (z def.).
Ale gdy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

to $\underline{\forall_k \ f^{(k)}(0) = 0} \Rightarrow \forall_n S_n(x) = 0 \Rightarrow r_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$

ćwiczenia

i $r_n(x)$ nie maleje przy $n \to \infty$ (bo od n nie zależy!)

Musimy mieć dodatkową wiedzę o $r_n(x)$, ponad to, że $r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$.

Postaci reszty

Potrzebujemy informacji nie tylko o tym, co się dzieje z $r_n(x)$ przy $x \to x_0$, ale też o tym, jak $r_n(x)$ zależy, dla ustalonego x, od n.

O $r_n(x)$ wiemy tyle, że

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję

$$\varphi(z) := f(x) - T_n(x; z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Oczywiście $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(x)$.

Załóżmy teraz dodatkowo, że <u>f jest $(n+1)$ razy różniczkowalna w pewnym otoczeniu x_0.</u>

Ustalmy teraz x wewnątrz tego otoczenia, (dla ustalenia uwagi $x > x_0$, ale dla $x < x_0$ identycznie). Wówczas φ jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna wewnątrz — a więc możemy do φ stosować tw. o wartości średniej.

Obliczmy najpierw $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{1!}\right] - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{2!}\cdot 2(x-z)\right] - \left[\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{3!}3(x-z)^2\right]$$

$$- \ldots - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}n(x-z)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n .$$

Wybieramy teraz dowolną $\psi(z)$ ciągłą i ściśle monotoniczną na $[x_0, x]$, różniczkowalną wewnątrz.

Z tw. Cauchy'ego o wart. średniej

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad \text{dla pewnego } \xi \in [x_0, x]$$

skąd

$$r_n(x) = \varphi(x_0) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\left(\psi(x) - \psi(x_0)\right) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \, \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} .$$

Dla różnych ψ dostajemy różne postaci reszty.

Np. dla $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$ mamy $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = (x-x_0)$, $\psi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$, zatem

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \, \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>reszta w postaci Lagrange'a</u>

Kładąc natomiast $\Psi(z) = x - z$ dostajemy

$$\Psi(x)=0, \quad \Psi(x_0)=x-x_0, \quad \Psi'(\xi)=-1,$$

skąd $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

reszta w postaci Cauchy'ego.

(ten sam wynik dostaniemy przykładając do $\varphi(z)$ tw. Lagrange'a o wart. średniej, zamiast tw. Cauchy'ego).

Często zapisując te postaci reszty korzysta się z faktu, że $\xi \in [x_0, x]$ daje się zapisać jako kombinację wypukłą x_0 i x : $\xi = \theta x + (1-\theta)x_0$ dla pewnej $\theta \in [0,1]$, wówczas $x - \xi = (1-\theta)(x-x_0)$ i reszta w post. Lagrange'a zapisuje się jako

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1-\theta)x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

a w postaci Cauchy'ego

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x + (1-\theta)x_0)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

dla pewnej $\theta \in (0,1)$

Znane nam rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall_{x:|x|<1} \; \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$\forall_{x:|x|<1} \qquad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$$

Twierdzenie: Jeżeli szereg $\sum a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny dla pewnego $x=\tilde{x}$, to jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich x bliższych x_0 niż $\tilde{x}$, a więc dla x takich, że $|x-x_0| < |\tilde{x}-x_0|$.

Dowód: Skoro $\sum a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ jest zbieżny, to ciąg $|a_n||\tilde{x}-x_0|^n \to 0$, zatem ciąg ten jest ogr. z góry:

$$\exists_{\substack{M\in\mathbb{R}\\ M>0}} \; \forall_n \quad |a_n||\tilde{x}-x_0|^n \le M.$$

Jeżeli więc $|x-x_0| < |\tilde{x}-x_0|$, to

$$\sum |a_n||x-x_0|^n = \sum |a_n||\tilde{x}-x_0|^n \cdot \frac{|x-x_0|^n}{|\tilde{x}-x_0|^n} \le \sum M \cdot \underbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{|\tilde{x}-x_0|}\right)}_{<1}^n$$

więc jest to szereg geometryczny zbieżny.

Wniosek: Zbiór punktów, w których szereg $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny jest przedziałem o końcach x_0-R, x_0+R; dopuszczamy $R=0$ (wówczas szereg jest zbieżny tylko dla $x=x_0$) i $R=\infty$ (wówczas szereg jest zbieżny dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$).

Przedział ten, gdy $0<R<\infty$, może być otwarty, domknięty lub jednostronnie domknięty; wewnątrz przedziału szereg jest bezwzględnie zbieżny (na końcach niekoniecznie). R nazywamy promieniem zbieżności szeregu $\sum a_n(x-x_0)^n$

Przykłady:

$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x=0$ (tj $R=0$);
dla $x\neq 0$ $n^n x^n \not\to 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest
- bezwzględnie zbieżny dla $x\in(-1,1)$
  (kryt. Cauchy'ego lub d'Alemberta)
  — do czego ?
- rozbieżny dla $x<-1$ i $x>1$,
  nie spełnia war. koniecznego zbieżności: $\frac{x^n}{n}\not\to 0$
- dla $x=1$ szereg harmoniczny — rozbieżny
- dla $x=-1$ szereg anharmoniczny - war. zbieżny

$R=1$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\overset{\text{bezwzględnie}}{\text{zbieżny}}$ $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ do e^x (np. kryt. d'Alemberta)

$R = \infty$.

Tw. (Cauchy, Hadamard) Niech $\mu = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.
Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest równy

a) 0 gdy $\mu = \infty$

b) ∞ gdy $\mu = 0$

c) $\frac{1}{\mu}$ gdy $0 < \mu < \infty$.

Dowód:

Jeżeli $\mu = 0$, to dla dowolnego ~~$x \in \mathbb{R}$, $x \neq$~~ ~~$x \neq 0$~~ $x \neq x_0$

mamy: $\cancel{\exists_n \forall_{m>n} \sqrt[m]{|a_m|} < \frac{1}{2x} \Rightarrow |a_m| < \frac{1}{2^n x^n}}$

$\cancel{\Rightarrow |x|^m \cdot |a_m| < \frac{1}{2^m} \Rightarrow \sum x}$

dla dost. dużych n

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \cancel{\frac{1}{2|x|}} \quad \frac{1}{2|x-x_0|}$$

$$|a_n||x-x_0|^n < \frac{1}{2^n}$$

i szereg $\sum |a_n||x-x_0|^n < \sum \frac{1}{2^n} < \infty$.

$\mu = \infty$, to dla dow. $x \neq x_0$ dla dost. dużych n

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{2}{|x-x_0|} \Rightarrow |a_n||x-x_0|^n > 2^n \to \infty$$

i szereg $\sum a_n (x-x_0)^n$ nie spełnia podst. kryt.

zostaje c). Jeżeli $|x-x_0|<\frac{1}{\mu}$, to istnieje $\varrho\in(|x-x_0|,\frac{1}{\mu})$, 78

$\frac{1}{\varrho}>\mu$. stąd dla dużych n

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{\varrho}\ ,\quad \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n}<\frac{|x-x_0|}{\varrho}<1$$

i z kryt. Cauchy'ego szereg jest zbieżny bezwzgl.

Jeżeli zaś $|x-x_0|>\frac{1}{\mu}$, to istnieje ciąg $n_k\to\infty$ t.że $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{1}{|x-x_0|}$

$|a_{n_k}||x-x_0|^{n_k}>1$ i ciąg $|a_n||x-x_0|^n\not\to 0$.

Ciągi i szeregi funkcyjne

Z ciągami i szeregami funkcyjnymi zetknęli już się Państwo nie raz w zadaniach typu „dla jakich x szereg $\sum_{n=1}^{\infty}$ (coś zależnego i od n, i od x) jest zbieżny?" „Oblicz, w zależności od parametru x, granicę ciągu $a_n(x) = $ (np.) $\frac{x^n}{1+x^n}$".

Def: Mówimy, że ciąg funkcji $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny punktowo do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$, jeżeli $\forall_{x \in A} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. (w szczególności dla każdego $x \in A$ ta granica istnieje!)

czyli $\underbrace{\forall_{x\in A}}\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ jest zbieżny punktowo do $f : A \to \mathbb{R}$, gdy zbieżny punktowo do f jest jego ciąg sum częściowych (a więc po prostu gdy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in A$ i jego suma równa jest $f(x)$.

Piszemy wówczas $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ lub krótko $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a(x) \right)$$

Ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do f, jeżeli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \underbrace{\forall_{x\in A}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(a więc dobór n_0 do ε nie zależy od punktu x)

Analogicznie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do f, jeżeli ciąg sum częściowych jest do f zbieżny jednostajnie.

Jednostajną zbieżność ciągu (f_n) do f zapisujemy $f_n \rightrightarrows f$. Oczywiście ciąg zbieżny jednostajnie jest zbieżny punktowo.

Przykłady: Rozważmy ciąg $f_n(x) = x^n$ na odcinku $[0,1]$. Jeżeli tylko $\underset{x\in[0,1]}{x \neq 1}$, to $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, natomiast dla $x=1$ $\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$, zatem ciąg f_n jest zbieżny punktowo do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

Czy jest do f zbieżny jednostajnie? NIE

By tak było, musielibyśmy mieć

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

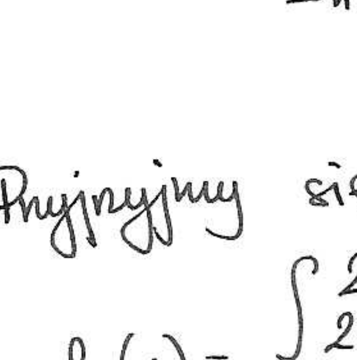
x może zależeć od n, bo to ma działać dla każdego $x \in A$

W szczególności dla $\varepsilon = \frac{1}{4}$

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \Big|\underbrace{f_n\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{f\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big)}_{=0}\Big| < \frac{1}{4} \quad ↯.$$

Przyjrzyjmy się teraz ciągowi funkcji

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & x\in[0,\frac{1}{2n}] \\ 2-2nx & x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{w pozostałych punktach } \mathbb{R}. \end{cases}$$



Wówczas $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$. (dlaczego?)