Dowód:

Wiemy, że g jest różniczkowalna w x_0, zatem

$$r_{x_0}(h) := \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - g'(x_0) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Analogicznie, skoro f jest różniczkowalna w $y=g(x_0)$, to

$$R_y(H) := \frac{f(y+H)-f(y)}{H} - f'(y) \xrightarrow{H \to 0} 0.$$

z definicji $r_{x_0}(h)$ mamy

$$g(x_0+h) = g(x_0) + hg'(x_0) + hr_{x_0}(h); \text{ podobnie}$$

$$f(g(x_0)+H) = f(g(x_0)) + Hf'(g(x_0)) + HR_{g(x_0)}(H).$$

No, to liczymy:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0) + \overbrace{(hg'(x_0)+hr_{x_0}(h))}^{=H}) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \cancel{\lim_{h\to 0}} \cancel{f(g(x_0)) + [hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)]f'(g(x_0)) + [hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)]R_{g(x_0)}(h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(g(x_0))} + [hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)]f'(g(x_0)) + [hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)]R_{g(x_0)}([hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)]) - \cancel{f(g(x_0))}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [g'(x_0) + \underbrace{r_{x_0}(h)}_{\downarrow h\to 0 \atop 0}]f'(g(x_0)) + [g'(x_0) + \underbrace{r_{x_0}(h)}_{h\to 0 \downarrow \atop 0}] \underbrace{R_{g(x_0)}(\underbrace{hg'(x_0)+hr_{x_0}(h)}_{\downarrow h \to 0 \atop 0})}_{\downarrow h\to 0 \atop 0}$$

$$= g'(x_0)f'(g(x_0)) + g'(x_0)\cdot 0 =$$

$$= g'(x_0)f'(g(x_0))$$

Na koniec zróżniczkujmy jakieś straszne paskudztwo:

$$f(x) = x^2 + x e^{\sin(\cos^2 x + \ln(1+x^4))} - \frac{\sqrt[3]{x^2+\cos x}}{x + \tan 2x}$$

(we wszystkich tych punktach x, dla których $-x \neq \tan 2x$)

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= 1 + \tan^2 x$$

$$f'(x) = 2x + e^{\sin(\cos^2 x + \ln(1+x^4))} + x\cos(\cos^2 x + \ln(1+x^4)) \cdot$$
$$\cdot e^{\sin(\cos^2 x + \ln(1+x^4))} \cdot \left(-2\sin x\cos x + \frac{4x^3}{1+x^4}\right) -$$
$$- \frac{(x^2+\cos x)^{-2/3} \cdot (2x - \sin x)(x + \tan 2x) - (x^2+\cos x)^{1/3}(2 + 2\tan^2 2x)}{(x+\tan 2x)^2}$$

Do kompletu twierdzeń pomocnych przy obliczaniu pochodnych brak nam jeszcze twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej:

Tw.: Załóżmy, że $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna ~~na~~ w $x_0\in(a,b)$, ma funkcję odwrotną $f^{-1}: f((a,b))\to\mathbb{R}$, oraz f^{-1} jest ciągła w $f(x_0)$. Załóżmy dodatkowo, że $f'(x_0)\neq 0$. Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w $y_0=f(x_0)$ i $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Nim udowodnimy to twierdzenie, przyjrzyjmy się założeniom. Niemal wszystkie są potrzebne po prostu po to, by sformułowanie twierdzenia miało sens – jedynym wyjątkiem jest założenie ciągłości f^{-1} w punkcie $y_0=f(x_0)$.

Zadanie 1. Zdefiniujmy dla $x\in[0,1)$ funkcję

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq\frac{1}{n},\ x\neq 1-\frac{1}{n} \text{ dla } n\geq 4\\ \frac{1}{n+[\sqrt{n}]} & x=\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n^2+n-1} & x=1-\frac{1}{n}\end{cases}\quad \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\geq 4$$

i rozszerzmy wzorem $f(-x)=-f(x)$ do funkcji f określonej na $(-1,1)$. Wykaż, że

① f jest różniczkowalna w 0, $f'(0)\neq 0$

② f jest różnowartościowa na $(-1,1)$ ← a więc ma odwrotną określoną na $f((-1,1))$

③ f^{-1} nie jest ciągła w $f(0)=0$.

Zadanie 2 Czy zakładając, że f jest ciągła na (a,b) możemy zrezygnować z założenia, że f^{-1} jest ciągła w $f(x_0)$?

Dowód twierdzenia:

Musimy obliczyć $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}$.

Z ciągłości f^{-1} w y_0 wiemy, że

$H := f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0) \xrightarrow{h\to 0} 0.$

Zauważmy, że $f(x_0+H)-f(x_0) = f(\cancel{f^{-1}(y_0)} + f^{-1}(y_0+h) - \cancel{f^{-1}(y_0)})$
$- y_0 = f(f^{-1}(y_0+h)) - y_0 = y_0+h-y_0 = h.$

Stąd

$$(f^{-1})'(y_0) \xleftarrow{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{H}{f(x_0+H)-f(x_0)} \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo $H \underset{h\to 0}{\to} 0$.

$\square$

Przykłady zastosowania:

① $\ln x$ to funkcja odwrotna do $e^x = \exp(x)$; jest ciągła w całej dziedzinie, więc jeżeli $y_0 = e^{x_0}$, to $(\ln)'(y_0) = \dfrac{1}{(\exp)'(x_0)} = \dfrac{1}{e^{x_0}}$

$$\| \\ (\ln)'(e^{x_0})$$

kładąc $t = e^{x_0}$ ~~mamy~~ ($x_0 = \ln t$ dla $t>0$)

$$(\ln)'(t) = \frac{1}{t}$$

zgodnie z tym, co już wiemy

② funkcja $\sqrt{x}$ jest, dla $x \geq 0$, funkcją odwrotną do x^2.

Niech więc $f(x) = x^2$, $x \geq 0$.

$y_0 = x_0^2 \iff x_0 = \sqrt{y_0}$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \iff (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

③ Rozważmy funkcję $f(x) = \tan x$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Na tym przedziale jest to funkcja ściśle rosnąca (udowodnimy to za chwilę), a więc różnowartościowa. Funkcję odwrotną do niej nazywamy arkus-tangensem i oznaczamy arctan.

Niech $y_0 = \tan x_0$

$$(\arctan)'(y_0) = \frac{1}{(\tan)'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}$$

$$\left\{ (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \right.$$

stąd $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

④ Analogicznie zauważamy, że $\sin x$ jest różnowartościowy na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($\sin x$ przekształca ten przedział na $[-1, 1]$). Funkcją odwrotną do $\sin x$ ograniczonego do tego przedziału jest $\arcsin x$ (arkus-sinus). Niech $y_0 = \sin x_0$, wówczas

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{(\sin)'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} =$$

$\left\{ \text{Dla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ \cos x_0 \geq 0, \text{ więc } \cos x_0 = \sqrt{1 - \sin^2 x_0} \right.$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

5. $\cos x$ ograniczony do $[0,\pi]$ jest ściśle malejący (jak poprzednio - za chwilę zobaczymy, jak to sprawdzać); funkcja doń odwrotna to $\arccos x$. $(\arccos x)' = ?$ (ćwiczenia).

Twierdzenie (Fermata) Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ przyjmuje w x_0 wartość największą lub najmniejszą na (a,b). Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to $f'(x_0)=0$.

Pierre de Fermat (1601 - 1665) - francuski prawnik i matematyk - amator (na najwyższym światowym poziomie). Był radcą sądu w Tuluzie; matematyką zainteresował się podczas studiów prawniczych w Bordeaux. Twierdzenia o metodach poszukiwania ekstremów i stycznych do krzywych były jednymi z pierwszych znaczących jego wyników. Prócz geometrii zajmował się głównie teorią liczb; zawdzięczamy mu nie tylko Wielkie Tw. Fermata (bez dowodu, podanego dopiero w latach 1993-94 przez A. Wilesa) ale (z dowodem) Małe Tw. Fermata (p pierwsza, to $\forall_{a\in\mathbb{N}}\ p \mid a^p - a$) i sporo wyników dotyczących liczb pierwszych, równań diofantycznych itd. Optyka zawdzięcza mu tzw. zasadę Fermata: promień świetlny poruszający się z A do B przebiega drogę wymagającą najkrótszego czasu przebiegu - pozwala to na wyjaśnienie np. zasady załamania światła (zaproponowanej wcześniej, ~~bez~~ empirycznie, przez Kartezjusza). Jego korespondencja z Pascalem położyła podwaliny pod rachunek prawdopodobieństwa.

Dowód tw. Fermata:

Załóżmy, że f przyjmuje w $x_0 \in (a,b)$ wartość największą.

Wówczas $\forall_{x \in (a,b)} \; f(x) - f(x_0) \leq 0$, zatem

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \, , \text{ bo } \forall_{\substack{x < x_0 \\ x \in (a,b)}} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0$$

o ile istnieje!

(ale założyliśmy różniczkowalność f w x_0).

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \, , \text{ bo } \forall_{\substack{x > x_0 \\ x \in (a,b)}} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0$$

Jeżeli jednak f jest w x_0 różniczkowalna, to

$$0 \leq \underbrace{f'_-(x_0)}_{f'(x_0)} = \underbrace{f'_+(x_0)}_{f'(x_0)} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 .$$

W przypadku, gdy f przyjmuje w x_0 wartość najmniejszą, możemy albo w oczywisty sposób zmodyfikować powyższy dowód, albo zauważyć, że wówczas $g = -f$ przyjmuje w x_0 wartość największą, zatem $\underbrace{g'(x_0)}_{-f'(x_0)} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$

Twierdzenie: Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $f'(x_0) > 0$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\forall_{\delta \in (0,\varepsilon)}$ $f(x_0-\delta) < f(x_0) < f(x_0+\delta)$ (tj na prawo od x_0 f przyjmuje wartości większe, niż w x_0, a na lewo - mniejsze).

Dowód:

$$0 < f'(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta},$$ więc dla małych $|\delta|$ iloraz różnicowy $\frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta}$ jest dodatni, a więc licznik i mianownik mają ten sam znak.

Twierdzenie Rolle'a o wart. średniej

Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$ $(a<b)$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

Michel Rolle (1652-1719) - francuski matematyk. Syn sklepikarza, początkowo pracował jako asystent notariusza, później - asystent adwokata. W 1675 roku wyjechał do Paryża, szukać pracy jako skryba i rachmistrz. Matematyki uczył się sam; w Paryżu klepał biedę, póki nie opublikował rozwiązania pewnego problemu teorioliczbowego, postawionego publicznie przez znanego matematyka J. Ozanama. To zwróciło na niego uwagę sekretarza stanu J.-B. Colberta - min. finansów i sekretarza stanu - min. wojny, markiza de Louvois. Ten ostatni zatrudnił go jako nauczyciela dla swego syna i był patronem Rolle'a przez wiele lat.

Rolle wprowadził kilka używanych do dziś oznaczeń, m.in $\sqrt[n]{x}$ na n-ty pierwiastek z x; bodaj jako pierwszy używał algorytmu Euklidesa do szukania wspólnego dzielnika dwóch wielomianów; wprowadził pochodną wielomianu (algebraicznie, bez granic); używał jej do przybliżonego obliczania pierwiastków. Mocno krytykował wprowadzany za jego życia rachunek różniczkowy („analizę nieskończenie małych wielkości") – jego zmyślne przykłady przyczyniły się do głębszego zrozumienia owych metod.

Dowód tw. Rolle'a

Z tw. Weierstrassa wiemy, że f przyjmuje na $[a,b]$ wartości największą i najmniejszą. Jeżeli którakolwiek z nich przyjmowana jest w punkcie $\xi \in (a,b)$, to pochodna f w ξ, na mocy tw. Fermata, jest równa zeru. Pozostaje nam zatem przypadek, gdy zarówno maksimum, jak i minimum f przyjmowane są w punktach a i b – ale wówczas

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = f(b) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \text{ a więc}$$

funkcja f jest stała na $[a,b]$ i w KAŻDYM punkcie $\xi \in (a,b)$ $f'(\xi)=0$.

~~Rolle używał~~ ~~Fermat~~

Uwaga (do tw. Fermata) To, że w jakimś punkcie ξ mamy $f'(\xi)=0$ nie oznacza jeszcze, że f ma w ξ ekstremum lokalne

(czyli wartość największą lub najmniejszą na przedziale $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon>0$).
Na przykład dla $f(x)=x^3$ $f'(0)=0$, choć f jest funkcją ściśle rosnącą (i jako taka nie ma ekstremów lokalnych).

Tw Rolle'a jest pierwszym z całej serii tzw. twierdzeń o wartości średniej (ew. pośredniej), tu poznamy 2, blisko z tw. Rolle'a związane:

<u>Twierdzenie Cauchy'ego o wart. średniej</u>

Niech funkcje f i g będą ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) i dodatkowo niech $\forall_{x\in(a,b)}\ g'(x)\neq 0$. Wówczas istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

<u>Dowód</u>: Rozważmy pomocniczą funkcję

$$h(x)=f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

Zauważmy, że h jest ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na (a,b) oraz $h(a)=h(b)=0$.
Z tw. Rolle'a istnieje zatem $\xi\in(a,b)$ t.ż. $h'(\xi)=0$.

$$0=h'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ $\square$

W praktyce najistotniejszy przypadek tw. Cauchy'ego otrzymujemy kładąc $g(x)=x$. Otrzymujemy w ten sposób $(g'(x)\equiv 1)$ (31)

<u>Tw. Lagrange'a o wart. średniej</u>: Niech f będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Istnieje wówczas $\xi\in(a,b)$ takie, że

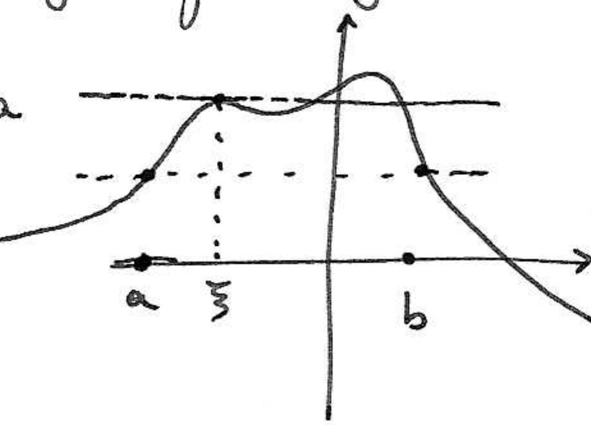
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Joseph Louis Lagrange (1736–1813), właśc. Giuseppe Lodovico Lagrangia (choć sam Lagrange używał francuskiej wersji nazwiska) był synem urzędnika w Turynie, ~~tam~~ też studiował. Długo by pisać o jego zasługach dla matematyki – zawdzięczamy mu przede wszystkim pierwszy systematyczny wykład mechaniki teoretycznej, podwaliny rachunku wariacyjnego, wiele wyników w teorii równań różniczkowych, a także początki teorii grup. Zapraszany wielokrotnie do wiodących ośrodków naukowych Europy opuścił (po wielu odmowach) Turyn w 1766 roku i objął ~~tam~~ w Berlinie pozycję Dyrektora Matematyki w ~~A~~kademii Berlińskiej, opuszczoną przez ~~Eu~~ Eulera. Wielokrotnie zdobywał nagrody w prestiżowych konkursach Akademii Paryskiej; po śmierci Fryderyka II przeniósł się w 1787 r. do Paryża. Cudem uszedł śmierci podczas Rządów Terroru; po rewolucji wykładał do śmierci w École Polytechnique.

Dlaczego twierdzenia te nazywa się twierdzeniami o wart. średniej? (pośredniej – łatwiej zrozumieć).
Przyjrzyjmy się tw. Lagrange'a i zastosujmy je do funkcji przebytej drogi s jako funkcji czasu t.
Wówczas $s(b) - s(a)$ to dystans, jaki przebyliśmy od chwili a do chwili b; $\frac{s(b)-s(a)}{b-a}$ to średnia prędkość na tym dystansie, a $s'(t)$ to prędkość chwilowa w chwili t. Tw. Lagrange'a mówi, że w pewnej chwili $\xi \in (a,b)$ prędkość chwilowa $s'(\xi)$ jest równa prędkości średniej na całym dystansie.

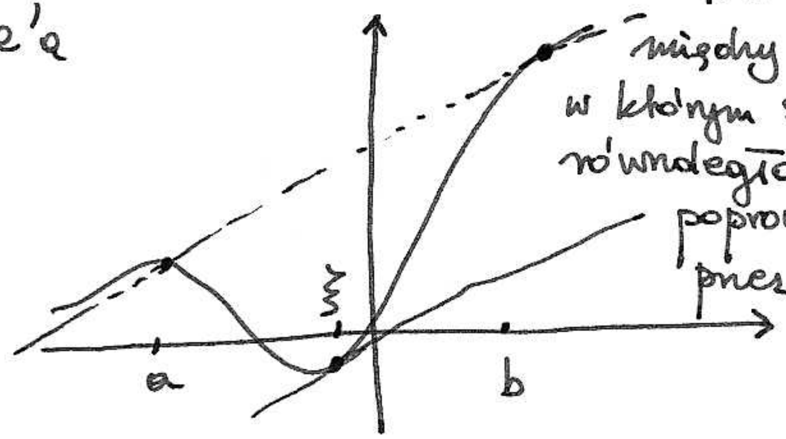
Interpretacja geometryczna tw. Rolle'a i Lagrange'a

Tw. Rollea



Jeżeli $f(a) = f(b)$, to między a a b jest co najmniej jeden punkt ξ w którym styczna do wykresu jest pozioma.

Tw. Lagrange'a



Istnieje punkt ξ między a a b, w którym styczna jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$

(wsp. kierunkowy tej siecznej to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

Kluczowy wniosek z tw. Lagrange'a

Twierdzenia o pochodnych funkcji monotonicznych:

<u>Tw</u>. Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), to

a) f jest niemalejąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)} f'(x) \geq 0$

b) — " — nierosnąca — " — $\iff \forall_{x\in(a,b)} f'(x) \leq 0$.

<u>D-d.</u>

Udowodnimy tylko a), dowód b) jest analogiczny (można też nierosnącą funkcję f zastąpić niemalejącą funkcją $g=-f$ i skorzystać z a)).

$\Leftarrow$

Weźmy dowolne $x, y \in [a,b]$, $x<y$. Mamy wykazać, że $f(x) \leq f(y)$. Wiemy jednak, z tw. Lagrange'a, że

z założenia

$$\exists_{\xi\in[x,y]} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(y)-f(x) \geq 0 \iff f(y) \geq f(x).$$

$\Rightarrow$

Jeżeli f jest niemalejąca, to $\forall_{x,x_0\in[a,b]} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, bo licznik i mianownik mają ten sam znak. Nierówność ta przenosi się na granicę przy $x\to x_0$.

$\Rightarrow \forall_{x_0\in(a,b)} f'(x_0) \geq 0$.

Czy prawdziwe jest narzucające się wzmocnienie tego twierdzenia: funkcja jest ściśle rosnąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)>0$?

Nie (a w każdym razie nie w stronę $\Rightarrow$) – funkcja $f(x)=x^3$ jest ściśle rosnąca na $[-1,1]$, choć $f'(0)=0$. Można też podać bardziej złożone przykłady funkcji ściśle rosnących, których pochodne zerują się nawet w ∞-wielu punktach w przedziale $[a,b]$. Mamy jednak

<u>Tw.</u> Niech f będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas f jest ściśle rosnąca na $[a,b]$ (odp. ściśle malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x)$ jest ≥ 0 we wszystkich punktach $x\in(a,b)$ oraz $\forall_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x<y}}\ \exists_{\xi\in(x,y)}\ f'(\xi)>0$.

(odp. $f'(\xi)<0$).

Innymi słowy – punkty, w których $f'>0$, są gęsto upakowane w $[a,b]$ – między dowolnymi dwoma punktami tego przedziału znajdę punkt, w którym pochodna jest dodatnia (odp. ujemna).

Nim udowodnimy to twierdzenie, wyciągnijmy ważny wniosek z poprzedniego:

Tw. Funkcja ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) jest na $[a,b]$ stała $\Leftrightarrow f' \equiv 0$ na (a,b).

Dowód: W stronę $\Rightarrow$ już dowiedliśmy, obliczając pochodną funkcji stałej. Pozostaje $\Leftarrow$.

Jeżeli $f' \equiv 0$ na (a,b), to, z poprzedniego twierdzenia, f jest na $[a,b]$ zarówno nierosnąca, jak i niemalejąca (bo $f' \geq 0$ i $f' \leq 0$), a to oznacza już, że f jest stała.

Dowód tw. o ścisłej monotoniczności

$\Longrightarrow$

Jeżeli f jest ściśle rosnąca, to z udowodnionego już twierdzenia o funkcjach niemalejących wiemy już, że $f' \geq 0$ na (a,b).

Weźmy teraz dowolne $x, y \in (a,b)$ takie, że $x<y$.
Gdyby $\forall_{\xi \in (x,y)}\ f'(\xi)=0$, to f byłaby stała na $[x,y]$ $\lightning$
Tak więc $\exists_{\xi \in (x,y)}\ f'(\xi)>0$.

$\Longleftarrow$

Załóżmy, że $f'(\xi) > 0\ \forall_{\xi \in (a,b)}$, ale f nie jest na $[a,b]$ ściśle rosnąca.
Z tw. o funkcjach ~~niezjem~~ niemalejących wiemy, że f jest na $[a,b]$ niemalejąca; jeżeli nie jest ściśle rosnąca, to istnieją $x, y \in [a,b]$, $x<y$, takie, że $f(x)=f(y)$. Wówczas jednak f jest na $[x,y]$ stała,

a więc $\forall_{\xi \in (x,y)} \; f'(\xi)=0$ $\lightning$.

Dla funkcji ściśle malejących dowód jest taki sam, można też, jak zwykle, zamiast malejącej funkcji f rozpatrzyć $g=-f$, która jest wówczas funkcją rosnącą i stosuje się do niej pierwszą część twierdzenia.

Pochodne a wypukłość

Na początek przypomnijmy

Lemat o monotoniczności ilorazów różnicowych

Jeżeli f jest wypukła na $A \subset \mathbb{R}$, to iloraz różnicowy $I_f(x,y)$ jest, dla dowolnego $y \in A$, niemalejącą funkcją zmiennej x. (określoną na $A \setminus \{y\}$).

Teraz wzmocnimy podany tu lemat: po pierwsze, wyjaśnimy, co dzieje się, gdy f jest ściśle wypukła, po drugie - wykażemy, że ~~monotoniczność~~ niemalenie $I_f(\cdot, y)$ jest, w rzeczywistości, równoważne wypukłości f.

Lemat (o monotoniczności, ..., wersja wzmocniona).
Funkcja f określona na wypukłym $A \subset \mathbb{R}$ jest w A wypukła (odp. ściśle wypukła) wtedy i tylko wtedy, gdy $I_f(x,y)$ jest, dla dowolnego $y \in A$, niemalejącą (odp. rosnącą) funkcją zmiennej x.

Dowód

$\Rightarrow$ dla funkcji wypukłych mamy z poprzedniej wersji lematu, pozostaje prześledzić dowód owej słabszej wersji przy założeniu, że f jest ściśle wypukła.

Przy tym założeniu mamy wykazać, że

$$\forall_{y \in A} \ \forall_{\substack{x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \neq y \\ x_1, x_2 \in A}} \quad I_f(x_1, y) < I_f(x_2, y).$$

W dowodzie rozpatrywaliśmy 3 możliwe konfiguracje punktów x_1, x_2, y:

I: $x_1 \quad y \quad x_2$ II: $x_1 \quad x_2 \quad y$ III: $y \quad x_1 \quad x_2$.

Tu zbadamy tylko najtrudniejszy przypadek I, w pozostałych będzie jeszcze prościej - proszę zajrzeć do tamtego dowodu (str ⑥).

Mamy $y = \frac{y-x_2}{x_1-x_2}x_1 + \frac{y-x_1}{x_2-x_1}x_2 = \overbrace{\frac{x_2-y}{x_2-x_1}}^{\alpha}x_1 + \overbrace{\frac{y-x_1}{x_2-x_1}}^{1-\alpha}x_2$.

skoro wszystkie 3 punkty są różne, to α i $1-\alpha$ są $\neq 0$ i

$$f(y) = f\left(\frac{x_2-y}{x_2-x_1}x_1 + \frac{y-x_1}{x_2-x_1}x_2\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } f \text{ ściśle} \\ \text{wypukła}}}{<} \frac{x_2-y}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{y-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) = (*)$$

Wypisując $I_f(x_1,y) = \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$ i wstawiając $(*)$ zamiast $f(y)$ otrzymujemy nierówność $I_f(x_1,y) < I_f(x_1,x_2)$

Analogicznie wstawiając $(*)$ w $I_f(x_2,y)$ otrzymujemy

$$I_f(x_2,y) > I_f(x_1,x_2) \implies I_f(x_1,y) < I_f(x_2,y)$$

(szczegóły na str. ⑥, jedyna różnica to ostra nierówność).

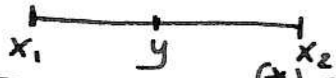
$\Longleftarrow$

Załóżmy, że $I_f(x,y)$ jest, dla dow. y, niemalejący (rosnący, gdy f ściśle wypukła).

Wybierzmy $\overset{x_1<x_2}{x_1, x_2 \in A}$ oraz $\alpha \in (0,1)$. Mamy wykazać, że $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$, a jeżeli f jest ściśle wypukła, to że nierówność jest ostra (przypadki $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $x_1 = x_2$ wykluczyliśmy w założeniach).

Oznaczmy $y = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$; wówczas $\alpha = \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1}$

$1-\alpha = \frac{y - x_1}{x_2 - x_1}$.



Wiemy, że $I_f(x_1, y) \overset{(*)}{\le} I_f(x_2, y)$

i jeżeli f jest ściśle wypukła, to nierówność jest ostra (i dalej tak samo w nier. oznaczonych (*)).

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \overset{(*)}{\le} \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(y)\left[(x_2 - y) + (y - x_1)\right] \overset{(*)}{\le} f(x_2)(y - x_1) + f(x_1)(x_2 - y)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(y) \overset{(*)}{\le} \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

□.

Wniosek – Twierdzenie:

~~Niech~~ Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, ~~jest wypukł~~ różniczkowalna w (a,b), jest wypukła (ściśle wypukła) wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest na (a,b) niemalejąca (rosnąca).