Powtórzenie o funkcjach wypukłych.

<u>Def</u>: Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły, gdy dla dowolnych $x, y \in A$ cały odcinek $[x,y]$ jest zawarty w A.

<u>Uwaga</u>: Jak zdefiniować odcinek? Była o tym mowa, ustaliliśmy, że $[x,y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1]\}$.

Stąd

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły, gdy

$$\forall_{x,y \in A} \ \forall_{\alpha \in [0,1]} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in A.$$

Przykłady zbiorów wypukłych:

cała przestrzeń, półprzestrzeń

kule - domknięte i otwarte

półkula

kwadrat, kostka w $\mathbb{R}^n$, czworościan

<u>Uwaga</u>: Część wspólna dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym (dowód - proste ćwiczenie).

<u>Uwaga</u>: Jakie podzbiory $\mathbb{R}$ są wypukłe?

cała prosta, półproste (otwarte i domknięte)

odcinki (otwarte, otwarto - domknięte i domknięte)

zbiory jednopunktowe i zbiór pusty

<u>Def</u>: Funkcja f określona na zbiorze wypukłym A nazywana jest <u>funkcją wypukłą</u>, gdy

$$(\lozenge) \quad \forall_{x,y\in A} \ \forall_{\alpha\in[0,1]} \quad f(\alpha x+(1-\alpha)y) \underset{(*)}{\leq} \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

Jeżeli w $(*)$ równość zachodzi tylko, gdy

- $\alpha = 0$

lub
- $\alpha = 1$

lub
- $x = y$

to mówimy, że f jest <u>ściśle wypukła</u>

Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest taka, że $-f$ jest wypukła, (odp. ściśle wypukła) to mówimy, że f jest wklęsła (ściśle wklęsła).

Funkcja f jest wklęsła (odp. ściśle wklęsła) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek $(\lozenge)$, z odwróconą nierównością $(*)$.

Przykłady:

- $f(x) = ax+b$ na $\mathbb{R}$ jest równocześnie wypukła i wklęsła, nie jest ściśle wypukła ani ściśle wklęsła.
- $f(x) = x^2$ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$
- $f(x) = e^x$ jest ściśle wypukła na $\mathbb{R}$
- $f(x) = \ln x$ jest ściśle wklęsła na $(0,\infty)$
- $f(x) = \sin x$ jest ściśle wklęsła na $[0,\pi]$
- $f(x) = \sqrt{x}$ jest ściśle wklęsła na $[0,\infty)$

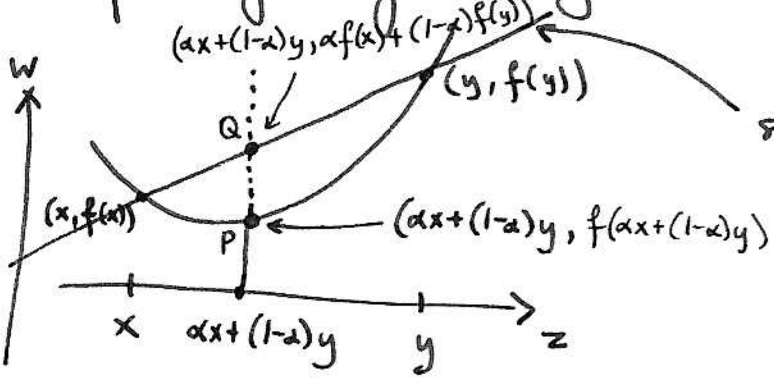
Pomocne nam było następujące twierdzenie:

Tw. Funkcja ciągła na zbiorze wypukłym A jest na A wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x,y\in A} \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \underset{(*)}{\leq} \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Jeżeli równość w (*) zachodzi tylko wówczas, gdy $x=y$, to f jest na A ściśle wypukła.

Interpretacja geometryczna wypukłości funkcji:



sieczna ma wzór

$$w = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(z-y)+f(y)$$

Jeżeli f jest wypukła, to punkt Q leży nie niżej, niż punkt P; jeżeli jest ściśle wypukła, to Q leży wyżej niż P. Innymi słowy: odcinek siecznej wykresu poprowadzonej przez $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ leżący między tymi punktami leży nad lub na wykresie f, gdy f jest wypukła
nad gdy f jest ściśle wypukła

Gdy f jest wklęsła, odcinek siecznej leży pod lub na wykresie (pod, gdy f jest ściśle wklęsła).

Łatwy

Wniosek: Funkcja f jest wypukła na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy jej nadwykres (epigraf)

$$\operatorname{epi} f = \{(x,y)\in \overset{A\times\mathbb{R}}{\cancel{\mathbb{R}^2}} : y \geq f(x)\}$$

jest zbiorem wypukłym.

Zadanie: Jeżeli f jest wypukła na A, to zbiór $\cancel{\{(x,y)}$ $\{x\in A : f(x)<y\}$ jest wypukły dla każdego $y\in\mathbb{R}$.

Podstawowe zastosowanie funkcji wypukłych jest związane z nast. twierdzeniem:

Tw. (nierówność Jensena)
Niech f będzie funkcją $\cancel{f}$ wypukłą na zbiorze A. Wówczas dla dowolnych $x_1,\dots,x_n\in A$ oraz $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ takich, że

- $\alpha_1+\dots+\alpha_n=1$ $\left(\Rightarrow \alpha_i\in[0,1]\right)$
- $\forall_i\ \alpha_i\geq 0$

zachodzi nierówność

$$f\big(\underbrace{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n}_{\text{kombinacja wypukła punktów } x_1,\dots,x_n \text{ o współczynnikach } \alpha_1,\dots,\alpha_n.}\big)\leq \alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n)$$

Jeżeli funkcja f jest ściśle wypukła, to równość w nierówności Jensena zachodzi tylko wówczas, gdy spełniony jest jeden z warunków:

- $\exists_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \alpha_i=1$ (a pozostałe α_j są, oczywiście, $=0$)
- wszystkie x_i takie, że $\alpha_i\neq 0$, są sobie równe.

Uwaga: Funkcje wklęsłe spełniają analogiczną nierówność, wraz z częścią dla funkcji ściśle wklęsłych, jest ona jednak w przeciwną stronę:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Z wklęsłości logarytmu na $(0,\infty)$ wywnioskowaliśmy

Tw. (nierówność Younga):

$$\forall_{a,b \geq 0} \quad \forall_{\substack{p,q>0 \\ \text{takie, że } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}} \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Równość w nier. Younga zachodzi tylko wtedy, gdy $a^p = b^q$!

Do dalszych rozważań będzie nam potrzebny następujący, ważny lemat:

Lemat (o monotoniczności ilorazów różnicowych).
Niech f będzie wypukła na $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas iloraz różnicowy

$$I_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

jest, dla dowolnego $y \in A$, ~~rosnącą~~ niemalejącą funkcją zmiennej x na zbiorze $A \setminus \{y\}$ ($I_f(y,y)$ nie jest określony).

Innymi słowy,

$$\forall_{y \in A} \quad \forall_{\substack{x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in A \\ x_1, x_2 \neq y}} \quad I_f(x_1,y) \leq I_f(x_2,y).$$

Dowód lematu

Mamy 3 możliwe układy punktów x_1, x_2 i y:

I: $x_1 \quad y \quad x_2$ II: $x_1 \quad x_2 \quad y$ III: $y \quad x_1 \quad x_2$

Zacznijmy od przypadku I.

$y \in [x_1, x_2] \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1] \; y = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$. Ile wynosi α?

$$y = \alpha (x_1 - x_2) + x_2 \Rightarrow \alpha = \frac{y - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \alpha = \frac{y - x_1}{x_2 - x_1}$$

Mamy zatem

$$f(y) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$
$$= \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Stąd

$$I_f(x_1, y) = \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} = \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \le$$
$$\le \frac{\frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) - f(x_1)}{y - x_1} = \frac{\cancel{\frac{y - x_1}{x_2 - x_1}} \left(f(x_2) - f(x_1) \right)}{\cancel{y - x_1}}$$
$$= I_f(x_1, x_2)$$

$$I_f(x_2, y) = \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \geq \frac{f(x_2) - \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}{x_2 - y}$$
$$= \frac{\cancel{\frac{x_2 - y}{x_2 - x_1}} \left(f(x_2) - f(x_1) \right)}{\cancel{x_2 - y}} = I_f(x_2, x_1) = I_f(x_1, x_2).$$

A zatem $I_f(x_1, y) \le I_f(x_1, x_2) \le I_f(x_2, y)$.

Przypadek II $\quad x_1 \quad x_2 \quad y$

teraz $x_2 \in [x_1, y]$, więc

$$x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha) y \quad , \text{gdzie } \alpha = \frac{y - x_2}{y - x_1} \quad ; \quad 1-\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y - x_1}$$

(proszę sprawdzić, że się zgadza!)

stąd $\quad f(x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(y)$

$$I_f(x_2, y) = \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} = \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f(y) - \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(y)}{y - x_2} = \frac{\alpha\,(f(y) - f(x_1))}{y - x_2} =$$

$$= \frac{\frac{y - x_2}{y - x_1}\,(f(y) - f(x_1))}{y - x_2} = \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} = I_f(x_1, y)$$

Przypadek III idzie tak samo, jak II; przedstawiamy $x_1 = \alpha y + (1-\alpha) x_2$, wyliczamy α, korzystając z wypukłości f szacujemy z góry $I_f(x_1, y)$. Pozostawiam jako (trywialne) ćwiczenie.

$\square$.

Wnioski:

① $I_f(x, y)$ jest, dla ustalonego x, niemalejącą funkcją zmiennej y.

Dowód: Oczywiście $I_f(x, y) = I_f(y, x)$. Jeżeli $y_1 < y_2$, $y_1 \neq x \neq y_2$, to $I_f(x, y_1) = I_f(y_1, x) \underset{\uparrow}{\leq} I_f(y_2, x) = I_f(x, y_2)$

z udowodnionego lematu.

② Jeżeli $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ leżą w A, $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, to

$$I_f(x_1, y_1) \leq I_f(x_2, y_2)$$

Dowód: Jeżeli $x_1 \neq y_2$, to $I_f(x_1, y_1) \overset{\text{z ①}}{\leq} I_f(x_1, y_2) \overset{\text{z lematu}}{\leq} I_f(x_2, y_2)$

Jeżeli zaś $x_1 = y_2$, to $x_2 \geq x_1 = y_2 \geq y_1$.

Gdyby $x_2 = y_1$, to te nierówności musiały by być równościami, $x_2 = x_1 = y_2 = y_1$ ↯, bo $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$

zatem $x_2 > y_1$.

$$I_f(x_1, y_1) \underset{\text{z lematu}}{\leq} I_f(x_2, y_1) \underset{\text{z (1)}}{\leq} I_f(x_2, y_2)$$

<u>Twierdzenie</u>: Funkcja wypukła f określona na przedziale otwartym (a,b) jest w (a,b) ciągła.

<u>Uwaga</u>: Na przedziale domkniętym tak być nie musi! Przykład:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

jest wypukła (proszę to sprawdzić), choć oczywiście w $x = 1$ jest nieciągła.

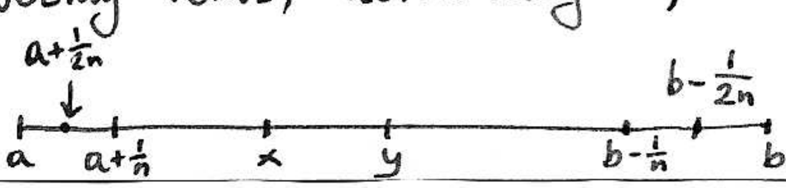
<u>Dowód</u>: Wykażemy, że funkcja f dla każdego (dost. dużego) $n \in \mathbb{N}$ spełnia na przedziale $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ warunek Lipszyca (ale ze stałą zależną od n).

Weźmy $n_0 \in \mathbb{N}$ na tyle duże, by $a + \frac{1}{n_0} < b - \frac{1}{n_0}$

Oczywiście dla $n > n_0$ $a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n}$.

~~Dla dowolnych x,y~~

Weźmy teraz, ustaliwszy n, dowolne $x, y \in [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$, $x \neq y$.



Z Wniosku (2) do lematu wiemy, że

$$I_f(x,y) \le I_f\left(b-\frac{1}{n}, b-\frac{1}{2n}\right), \text{ bo oczywiście}$$

$$x \le b-\frac{1}{n}$$

$$y \le b-\frac{1}{2n}.$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \frac{f(b-\frac{1}{n})-f(b-\frac{1}{2n})}{(b-\frac{1}{n})-(b-\frac{1}{2n})} = \frac{f(b-\frac{1}{n})-f(b-\frac{1}{2n})}{-\frac{1}{2n}} = B_n$$

analogicznie

$$I_f(x,y) \ge I_f\left(a+\frac{1}{2n}, a+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ge \frac{f(a+\frac{1}{2n})-f(a+\frac{1}{n})}{-\frac{1}{2n}} = A_n$$

stąd $$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \max\{|A_n|, |B_n|\} \le |A_n|+|B_n|$$

i $$|f(x)-f(y)| \le |x-y|\,(|A_n|+|B_n|)$$

(bardzo nieoptymalna) stała Lipszyca.

Wiemy zatem, że funkcja f, jako lipszycowska, jest ciągła na $[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$. Z drugiej strony $\forall_{c\in(a,b)}\ \exists_{n_1\in\mathbb{N}}$ takie, że $c\in[a+\frac{1}{n_1}, b-\frac{1}{n_1}]$, więc f jest ciągła w c $\Rightarrow$ f jest ciągła w (a,b)

tu korzystamy z otwartości przedziału (a,b);
Nieprawda, że $\forall_{c\in[a,b]}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}$ tż. $c\in[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$,
bo np. dla $c=a$ nie ma takiego n.

Do funkcji wypukłych jeszcze wrócimy, teraz jednak czas na kluczową definicję rachunku różniczkowego:

Def: Pochodną funkcji $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ w punkcie $x_0\in(a,b)$ nazywamy granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(oczywiście o ile ta ostatnia istnieje).

Jeżeli f ma w x_0 pochodną (tj. powyższa granica istnieje), to mówimy, że f jest w x_0 różniczkowalna.

Pochodną oznaczać będziemy $f'(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $f_x(x_0)$ – w zależności od działu matematyki i osobistych preferencji matematyka.

Zmieniając punkt x_0 widzimy, że pochodną funkcji f też możemy traktować jako funkcję zmiennej x_0.

Uwaga:

$$f'(x_0)\overset{df}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

często wygodniejsze w rachunkach.

Rachunek różniczkowy (i całkowy) „odkryli" niezależnie od siebie Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton raczej różniczkował równania niż funkcje (tj obliczał pochodne obu stron równania, przyrównując je), Leibniz obliczał pochodne funkcji, jemu też zawdzięczamy wiele dzisiejszych oznaczeń i terminologię (Newton swoją metodę nazywał metodą fluksji).
Historię sporu o pierwszeństwo, jak i złożone dzieje początków tej teorii znajdą Państwo w znakomitych ~~da~~ książkach „Wykłady z historii matematyki" M. Kordosa i „Historia fizyki" A.K. Wróblewskiego – polecam.
Polską terminologię (pochodne, całki, różniczkowanie) zawdzięczamy Janowi Śniadeckiemu.

Sir Isaac Newton (1642 – 1727) – syn niepiśmiennego rolnika,
25 XII wg kalendarza juliańskiego, wg współczesnego gregoriańskiego – 4 I 1643.
wcześniak; ojciec zmarł na 3 miesiące przed jego narodzeniem.
Wychowywany przez babkę (matka ponownie wyszła za mąż); jego niezwykłe uzdolnienia odkrył zapewne brat matki.
Newton studiował w Cambridge u Isaaca Barrowa (jeszcze o nim usłyszymy), a od 1669 roku przejął po Barrowie katedrę. Miał ogromny wpływ na rozwój fizyki – oprócz zasad dynamiki, prawa ciążenia, położył też podwaliny pod współczesną (klasyczną, tj niekwantową) optykę... Długo by wymieniać. W 1696 przeniósł się do Londynu, gdzie 3 lata później został dyrektorem mennicy. Od 1703 do śmierci był prezesem Royal Society – Królewskiego Towarzystwa Naukowego. Pochowany został w Opactwie Westminsterskim.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) – wielki niemiecki filozof i matematyk. Syn profesora filozofii na uniwersytecie w Lipsku. Studiował w Lipsku, Heidelbergu i Jenie, po powrocie do Lipska obronił doktorat z prawa, następnie wstąpił do służby dyplomatycznej elektora Moguncji; wysłany do Paryża na dwór Ludwika XIV poznał tam Christiaana Huygensa, od którego nauczył się matematyki.
Podczas pobytu w Paryżu (1672-76) odkrył własną wersję rachunku różniczkowego i całkowego. Skonstruował pierwszą maszynę liczącą, która wykonywała wszystkie 4 operacje arytmetyczne – został za to członkiem-korespondentem Royal Society of London.
Po śmierci elektora został osobistym doradcą księcia Brunszwiku, resztę życia spędził na dworze hanowerskim.
Oprócz rachunku różniczkowego i całkowego zawdzięczamy mu pojęcia momentu pędu i momentu siły, a także używany do dziś system katalogów rzeczowych w bibliotekach. Nie czuję się kompetentny, by opisywać jego wielki wkład w filozofię; zajmował się też konstrukcją zegarów, maszyn górniczych, Zawdzięczamy mu również układ dwójkowy.

Jan Śniadecki (1756-1830) astronom, matematyk, filozof i geograf. Studiował w Krakowie i Paryżu; od 1781 był profesorem w Krakowie; założył tam obserwatorium astronomiczne i stację klimatologiczną. Od 1806 do 1825 był profesorem na Uniwersytecie Wileńskim, w tym w latach 1806-1815 – rektorem. Uczył m. in. Adama Mickiewicza, który sportretował go jako Starca (od szkiełka i oka) w „Romantyczności". Twórca polskiej terminologii matematycznej i astronomicznej (oczywiście nie jedyny, ale jeden z pierwszych).

Dla porządku powiedzmy jeszcze, czym jest ta różniczka, od której pochodzi termin „różniczkowanie".

<u>Def</u>: Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję liniową, przypisującą liczbie $h \in \mathbb{R}$ liczbę $f'(x_0)\cdot h$.

Różniczkę oznaczamy symbolem $df(x_0)$

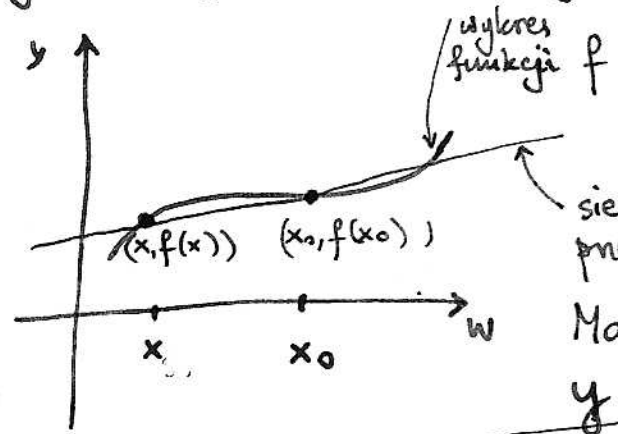
$$df(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h$$

często piszemy po prostu $df(x_0)h$

Z definicji tej zaczniemy poważniej korzystać, gdy zajmiemy się rachunkiem różniczkowym wielu zmiennych.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Przypomnijmy obserwację, jaką poczyniliśmy przy okazji geometrycznej interpretacji wypukłości funkcji



sieczna wykresu poprowadzona przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$.

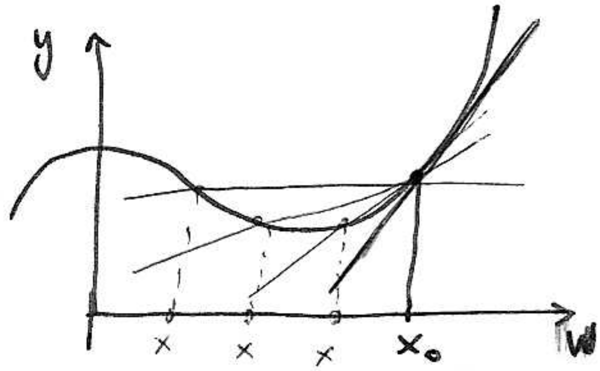
Ma ona wzór

$$y = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(w-x_0)+f(x_0)$$

(wzór prostej przechodzącej przez 2 zadane punkty).

to jest iloraz różnicowy!

Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ to współczynnik kierunkowy siecznej wykresu funkcji f, poprowadzonej przez punkty $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$.



Co się dzieje z tym ilorazem, gdy x dąży do x_0? Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w x_0, to iloraz dąży do pochodnej f' w x_0. A sieczna? Intuicyjnie stwierdzamy, że dąży do stycznej do wykresu f w x_0. Ale w ogóle co to jest styczna do krzywej? Można by o tym długo rozprawiać – np twierdzić (słusznie), że jest to prosta najlepiej (w jakim sensie?) przybliżająca tę krzywą w x_0, ale dla nie bardzo podłych krzywych te rozważania i tak prowadzą do pochodnych. My zatem przyjmijmy, że styczna do wykresu funkcji f w x_0 to, z definicji, granica siecznych – jak na rysunku – przy $x \to x_0$

Sieczna ma wzór $y = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(w-x_0)+f(x_0)$, więc w granicy przy $x \to x_0$ otrzymujemy

$$y = f'(x_0)(w-x_0)+f(x_0)$$

wzór stycznej do wykresu f w punkcie x_0 (istnieje oczywiście pod warunkiem, że f jest w x_0 różniczkowalna).

Obliczmy pochodne najważniejszych funkcji:

① funkcja stała $f(x)=c$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

niezależnie od x_0.

② funkcja liniowa $f(x)=ax+b$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)+\cancel{b}-ax_0-\cancel{b}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$ ← znów niezależnie od punktu x_0.

③ funkcja wykładnicza $f(x)=e^x$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}e^{x_0}\underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1}=e^{x_0}$$

zauważmy - pochodną funkcji e^x jest ona sama!

④ funkcja potęgowa $f(x)=x^a$ $(x>0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^a-x_0^a}{h}=\lim_{h\to 0}x_0^a\,\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-1}{h}=$$

$$=x_0^a\lim_{h\to 0}\frac{e^{a\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}-1}{h}=x_0^a\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{e^{\overbrace{a\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}^{\xrightarrow{h\to 0}0}}-1}{a\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}}_{\downarrow h\to 0\ \ 1}\cdot\frac{a\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

$$=x_0^a\,a\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\overbrace{\frac{h}{x_0}}^{\xrightarrow{h\to 0}0}\right)}{\frac{h}{x_0}}}_{\downarrow\ 1}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{ax_0^a}{x_0}=ax_0^{a-1}$$

⑤ funkcja logarytmiczna $f(x)=\ln x$ $x>0$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}^{\to 1}}{\frac{h}{x_0}\cdot x_0}=\frac{1}{x_0}$$

6. funkcje trygonometryczne $\sin x$ i $\cos x$

$f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cos(x_0 + \underbrace{\tfrac{h}{2}}_{\to 0}) = \cos x_0$$

$\cos x$ jest ciągły

$g(x) = \cos x$

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}\sin\frac{x_0+h+x_0}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x_0+\frac{h}{2})}{h} = -\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \sin(\underbrace{x_0+\tfrac{h}{2}}_{\to x_0}) =$$

$$= -\sin x_0$$

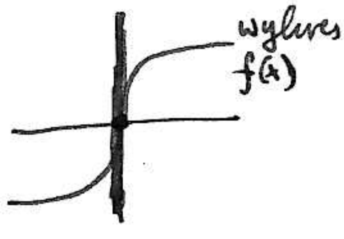
Pochodną sinusa jest cosinus, cosinusa – minus sinus.

Żeby jednak móc korzystać z tych „cegiełek", musimy zbadać, jak zachowuje się operacja różniczkowania względem operacji arytmetycznych.

Dopisek do definicji stycznej do wykresu

Jest jeden przypadek, gdy funkcja nie jest wprawdzie w x_0 różniczkowalna, ale możemy sensownie zdefiniować prostą styczną do wykresu w x_0 – ma to miejsce wtedy, gdy $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$. Mówimy wówczas czasem, że pochodna jest w takim punkcie nieskończona.

Przykład: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ (= x^{1/2}) & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ w $x_0 = 0$.



Styczną w takim przypadku jest prosta pionowa $x = x_0$.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w x_0 ciągła.

Dowód. Musimy wykazać, że $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (w szczególności, że granica ta istnieje).

Mamy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x_0) - (x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] =$

$= f(x_0) - 0\cdot f'(x_0) = f(x_0)$.

Twierdzenie: Niech funkcje $f, g: (a,b)\to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w punkcie $x_0\in(a,b)$. Wówczas

a) Niech $\tilde{f}(x) = cf(x)$ dla pewnej stałej $c\in\mathbb{R}$. Wówczas $\tilde{f}'(x_0) = cf'(x_0)$

b) $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0)\pm g'(x_0)$

Dowód: Zauważmy, że a) $I_{\tilde{f}}(x,y) = I_{cf}(x,y) = cI_f(x,y)$

b) $I_{f\pm g}(x,y) = I_f(x,y) \pm I_g(x,y)$

i dalej z własności arytm. granicy (bo $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} I_f(x,x_0)$).

Chciałoby się mieć podobny wzór dla iloczynu i ilorazu dwóch funkcji. Musimy zatem wyprowadzić odpowiednie wzory na $I_{fg}(x,y)$ i $I_{f/g}(x,y)$, wyrażając je przez ilorazy różnicowe dla f i g.

Prosty rachunek:

$$I_{fg}(x,y) = \frac{f(x)g(x) - f(y)g(y)}{x-y} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)}{x-y}$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{x-y} g(x) + \frac{g(x)-g(y)}{x-y} f(y) =$$

$$= I_f(x,y)\, g(x) + I_g(x,y)\, f(y)$$

Stąd, wypisując ten wzór dla $y = x_0$ i przykładając granicę przy $x \to x_0$, otrzymujemy

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} I_{fg}(x,x_0) = \lim_{x\to x_0} [I_f(x,x_0)g(x) +$$

$$+ I_g(x,x_0) f(x_0)] = f'(x_0) \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{\parallel} + g'(x_0) f(x_0)$$

$g(x_0)$, bo g jest w x_0 różniczkowalna, a zatem ciągła!

Dostaliśmy wzór – twierdzenie, znany jako wzór lub reguła Leibniza:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

A co z ilorazem? Oczywiście trzeba założyć, że $g(x_0) \neq 0$. Skoro g jest różniczkowalna w x_0, to jest też w x_0 ciągła, a więc dla x bliskich x_0 mamy również $g(x) \neq 0$. (Dlaczego?)

Jeżeli $g(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$, $x \neq y$, to jest sens rozpatrywać

$$I_{f/g}(x,y) = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}}{x-y} = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{g(x)g(y)(x-y)} =$$

$$= \frac{[f(x)-f(y)]g(y) - f(y)[g(x)-g(y)]}{g(x)g(y)(x-y)} =$$

$$= \frac{I_f(x,y)g(y) - I_g(x,y)f(y)}{g(x)g(y)}$$

Kładąc, jak poprzednio, $y = x_0$ i przechodząc z x do granicy x_0 otrzymujemy (korzystając znów z ciągłości g w x_0)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Powyższe twierdzenia nie pomogą nam, niestety, w obliczeniu pochodnej $\sin(\sqrt{x^2+1})$ czy $e^{\cos x}$. Potrzebujemy jeszcze twierdzenia o pochodnej złożenia dwóch funkcji.

<u>Twierdzenie</u>: Niech funkcja $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w $x_0 \in (a,b)$, $f: g((a,b)) \to \mathbb{R}$ – różniczkowalna w $g(x_0) \in g((a,b))$. Wówczas

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

przypomnienie: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$