Analiza matematyczna I.2 z gwiazdką

Zasady zaliczania

- jedno kolokwium — max 30 p.
- ćwiczenia (zadania domowe, aktywność) — max 30 p.
- egzamin pisemny — max 40 p.

100 p.

Na podstawie tych punktów podam wstępną propozycję ocen, ale oprócz egzaminu pisemnego przewiduję dla wszystkich egzamin ustny, na którym ocena może wzrosnąć, a w drastycznych przypadkach - również ulec obniżeniu.

Zbiory i funkcje wypukłe

Przypomnienie

- niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. Odcinek o końcach w x i y to zbiór $[x,y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}\}$

- $A \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>wypukły</u>, gdy dla każdych $x, y \in A$ zachodzi $[x,y] \subset A$, czyli gdy

$$\forall_{x,y\in A} \quad \forall_{\alpha\in[0,1]} \quad \alpha x + (1-\alpha)y \in A.$$

- część wspólna dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

- Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukły.
  $f: A \to \mathbb{R}$ nazywamy <u>wypukłą</u>, gdy

$$\forall_{x,y\in A} \quad \forall_{\alpha\in[0,1]} \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \overset{(*)}{\leq} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Jest jasne, że gdy $\cdot)\ x = y$ lub $\cdot\cdot)\ \alpha \in \{0,1\}$, w $(*)$ jest równość. Jeżeli poza tymi przypadkami w $(*)$ jest ostra nierówność, to mówimy, że f jest <u>ściśle wypukła</u>.

- odwracając nierówność $(*)$ dostajemy definicję funkcji wklęsłej (odp. ściśle wklęsłej).

• <u>twierdzenie</u> (kryterium połówkowe)

Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ jest wypukły ($\Rightarrow$ jest przedziałem) i $f: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$f \text{ jest wypukła} \iff \forall_{x,y \in A} \; f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$f \text{ jest ściśle wypukła} \iff \forall_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \; f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

• korzystając z kryt. połówkowego wykazaliśmy

— wypukłość (ścisłą) $\exp(x)$ i x^2

— wklęsłość (ścisłą) $\sqrt{x}$ i $\ln x$

• nierówność Jensena:

Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, $m \in \mathbb{N}$

$x_1, \dots, x_m \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$

i $f: A \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) \overset{(*)}{\leq} \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_m f(x_m)$$

Jeżeli f jest ściśle wypukła, to w $(*)$ jest równość tylko gdy •) wszystkie x_i t.że $\alpha_i \neq 0$ są sobie równe

lub ••) dla pewnego $j \in \{1, \dots, m\}$ $\alpha_j = 1$ (a pozostałe są równe 0)

Dla funkcji wklęsłych (i ściśle wklęsłych) zachodzi analogiczne twierdzenie, tylko nierówność w $(*)$ jest w przeciwną stronę.

Zastosowania nier. Jensena (i ogólniej wklęsłości i wypukłości)

· nier. Younga

William Henry Young (1863-1942)

Niech $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Wówczas dla dowolnych nieujemnych x,y mamy

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

<u>Dowód</u>: $\ln\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right) \underset{\uparrow}{\geq} \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln xy$

wklęsłość logarytmu

a że $\ln$ jest funkcją rosnącą, to $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q \geq xy$
Nietrudno sprawdzić, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x^p=y^q$.

Trochę inny dowód - zadanko:
<u>Krok 1</u> (uogólnienie nier. Bernoulliego) Wykazać, że dla $t\geq -1$ i $\alpha\in(0,1)$ zachodzi $(1+t)^\alpha \le 1+\alpha t$
<u>Krok 2</u> Udowodnić nier. Younga stosując n.n.B. z $t=\frac{x^p}{y^q}-1$ i $\alpha=\frac{1}{p}$.

- <u>nierówność Höldera</u> Niech $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dla dowolnych $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m y_i^q\right)^{1/q}$$

<u>Dowód</u>: Oznaczmy $A = \sum_{i=1}^m x_i^p$, $B = \sum_{i=1}^m y_i^q$

i załóżmy na początek, że $A = B = 1$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \overset{\text{n.Y.}}{\leq} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q\right) = \frac{1}{p} \cdot A + \frac{1}{q} \cdot B = 1 = A^{1/p} B^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m y_i^q\right)^{1/q}. \qquad (\star)$$

Dalej, jeżeli $A = 0$, to wszystkie x_i są równe 0 i nier. Höldera zachodzi; analogicznie gdy $B = 0$.

Jeżeli zaś $A, B > 0$, to niech $a_i = x_i / A^{1/p}$, $b_i = y_i / B^{1/q}$.

Wtedy $\sum_{i=1}^m a_i^p = 1$, $\sum_{i=1}^m b_i^q = 1$, więc możemy zastosować $(\star)$ (z a_i oraz b_i w miejsce x_i i y_i)

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m b_i^q\right)^{1/q} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{A^{1/p}} \cdot \frac{y_i}{B^{1/q}}$$

i mnożąc obie strony przez $A^{1/p} B^{1/q}$ dostajemy tezę.

To powyżej to nierówność Höldera dla sum skończonych. Przechodząc z m do ∞ lub po prostu powtarzając dowód dostajemy nier. Höldera dla szeregów:

Tw. Niech $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ będą szeregami takimi, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q < \infty$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q > 1\right)$

Wówczas szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ jest zbieżny bezwzględnie i

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

W przyszłości obejrzymy jeszcze inne wersje nier. Höldera; wszystkie dowodzi się w ten sam sposób.

Zadanie: Kiedy w nier. Höldera zachodzi równość?

· Nierówność Minkowskiego

Niech $p \geq 1$ i niech (x_i) oraz (y_i) będą takimi ciągami liczb rzeczywistych (lub zespolonych – bez zmian w dowodzie), że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$.

Wówczas szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p$ jest zbieżny i

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Uwagi: • Biorąc ciągi (x_i) i (y_i) t.ż. $x_i = y_i = 0$ dla $i > m$ dostajemy wersję dla sum skończonych

• Dla $p = 1$ nierówność Minkowskiego wynika natychmiast z nier. trójkąta $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$

Dowód (dla $p>1$)

Jeżeli lewa strona nier. Minkowskiego jest równa 0, to nierówność zachodzi (prawa strona jest nieujemna). Załóżmy zatem, że $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p > 0$; niech $q=\frac{p}{p-1}$ $\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \overset{n.\Delta}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \underset{p,q}{\overset{n.H.}{\leq}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{\overbrace{(p-1)q}^{=p}}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$$

Dzieląc obie strony przez $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$ dostajemy po prawej to, co trzeba, a po lewej

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}$$

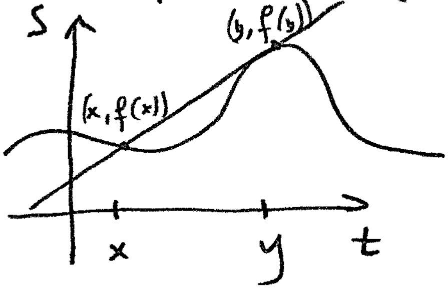
$\square$.

Zadania

- Kiedy w nier. Minkowskiego zachodzi równość?
- Wykazać, że dla $p\in(0,1)$ nierówność Minkowskiego zachodzi <u>w przeciwną stronę</u>:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, $f: P \to \mathbb{R}$.
Iloraz różnicowy funkcji f w punktach $x, y \in P$, $x \neq y$, to $I_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Ma on ważną interpretację geometryczną:



Nietrudno sprawdzić, że sieczna wykresu funkcji f przechodząca przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ ma wzór

$$s = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-y) + f(y) = I_f(x,y)(t-y) + f(y)$$

więc iloraz różnicowy $I_f(x,y)$ to współczynnik kierunkowy siecznej przechodzącej przez punkty na wykresie f leżące nad x i y.

Funkcje wypukłe i ściśle wypukłe możemy scharakteryzować poprzez zachowanie ich ilorazów różnicowych. Zauważmy, że I_f możemy traktować jako funkcję dwóch zmiennych x, y określoną na $P \times P \setminus D$, gdzie $D = \{(x,x) : x \in P\} \subset P \times P$ jest przekątną.

Twierdzenie (Lemat o monotoniczności ilorazów różnicowych)

Funkcja $f: P \to \mathbb{R}$ jest wypukła (odp. ściśle wypukła) wtedy i tylko wtedy, gdy $I_f: P \times P \setminus D \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą (odp. rosnącą) funkcją każdej ze swoich dwóch zmiennych.

Dowód

Zacznijmy od prostszego kierunku: załóżmy, że I_f jest niemalejącą (odp. rosnącą) funkcją każdej ze zmiennych. Niech $x, y \in P$; $\alpha \in [0,1]$.

Możemy b.s.o. założyć, że $x \le y$; oznaczmy $z = \alpha x + (1-\alpha) y$. $(x \le z \le y)$

Z założenia $I_f(z,x) \overset{(<)}{\le} I_f(y,x)$, czyli

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \overset{(<)}{\le} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) = f(z) \overset{(<)}{\le} f(x) + \frac{z-x}{y-x}(f(y)-f(x))$$
$$= \left(1-\frac{z-x}{y-x}\right) f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

Mamy jednak $\frac{z-x}{y-x} = \frac{(1-\alpha)(y-x)}{y-x} = 1-\alpha$, więc

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \overset{(<)}{\le} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Jeżeli I_f jest rosnącą funkcją pierwszej zmiennej, $x<y$ oraz $\alpha \in (0,1)$, możemy powtórzyć powyższe

rozumowanie zastępując $\overset{(\cdot)}{\leq}$ przez $<$.

W ten sposób wykazujemy, że f jest wypukła, a gdy I_f jest rosnącą funkcją pierwszej zmiennej – ściśle wypukła.

Odwracając to rozumowanie otrzymujemy

Lemacik: Jeżeli $f : P \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x, y \in P$, $x < y$ i $z \in (x, y)$, to

$\cdot)$ $I_f(x, z) \leq I_f(x, y)$ $\quad\cdot\cdot)$ $I_f(x, y) \leq I_f(z, y)$

i gdy f jest ściśle wypukła, to nierówności te są ostre.

Dla porządku napiszmy dowód lemaciku:

Skoro $z \in (x, y)$, to $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, gdzie $\alpha = \frac{y-z}{y-x}$, $1-\alpha = \frac{z-x}{y-x}$, więc

$$f(z) = f(\alpha x + (1-\alpha) y) \overset{(\cdot)}{\leq} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

czyli równoważnie

$$I_f(x, z) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \overset{(\cdot)}{\leq} \frac{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(x)}{z - x} =$$

$$= \frac{1-\alpha}{z-x} \left(f(y) - f(x)\right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$= I_f(x, y)$$

i $$I_f(z, y) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \overset{(\cdot)}{\geq} \frac{f(y) - \alpha f(x) - (1-\alpha) f(y)}{y - z} =$$

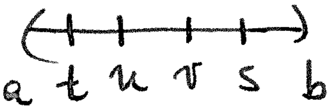
$$= \frac{\alpha}{y-z} \left(f(y) - f(x)\right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = I_f(x, y)$$

Z lemaciku twierdzenie o monotoniczności ilorazów różnicowych wynika już bardzo szybko:

Niech $f: P \to \mathbb{R}$ będzie wypukła, $x, y, u, v \in P$, $x \neq y$, $u \neq v$.
Wykażemy, że jeżeli $x \leq u$, $y \leq v$, to $I_f(x,y) \overset{(*)}{\leq} I_f(u,v)$, a gdy f jest ściśle wypukła, to w $(*)$ równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$, $y = v$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $x < y$ (bo $I_f(x,y) = I_f(y,x)$), wtedy $x < y \leq v$.
Jeżeli $y = v$, to $I_f(x,y) = I_f(x,v)$,
a gdy $y < v$, to $y \in (x,v)$ i z lemaciku $I_f(x,y) \overset{(\circ)}{\leq} I_f(x,v)$.
Wiemy, że $u \geq x$, więc albo $u > v$,
wtedy $I_f(x,v) \overset{(\circ)}{\leq} I_f(x,u) \overset{(\circ)}{\leq} I_f(v,u) = I_f(u,v)$
(obie nier. z lemaciku)
albo $v > u$, wtedy $I_f(x,v) \overset{(\circ)}{\leq} I_f(u,v)$
i nietrudno sprawdzić, że nierówności ozn. $(\circ)$ są dla f ściśle wypukłej są ostre, chyba, że odp. $\begin{smallmatrix} x=u \\ y=v \end{smallmatrix}$ □

Wniosek: funkcja wypukła na przedziale otwartym jest na nim ciągła.

Dowód Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie wypukła.
Ustalmy dowolne $u,v\in(a,b)$ tż $u<v$
i dobierzmy do u i v $t,s\in(a,b)$ tż 

tzn. $a<t<u<v<s<b$.
Wtedy dla dow. $x,y\in[u,v]$ mamy

$$I_f(t,u)\le I_f(x,y)\le I_f(v,s)$$

(z tw. o monot. ilorazów różnicowych),

więc

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \underbrace{\max\left(|I_f(t,u)|,\ |I_f(v,s)|\right)}_{\text{ozn. } L\text{, nie zależy od } x \text{ i } y}$$

czyli $|f(x)-f(y)|\le L\cdot|x-y|$

To dowodzi, że f spełnia na $[u,v]$ war. Lipschitza – jest więc na $[u,v]$ ciągła.

Dla dowolnego $z\in(a,b)$ znajdziemy $u,v\in(a,b)$ tż $a<u<z<v<b \Rightarrow f$ jest ciągła na $[u,v]$, jest więc ciągła w z.

Stąd f jest ciągła na (a,b).

$\square$.

Co się dzieje z sieczną wykresu funkcji f, przechodzącą przez punkty $(x, f(x))$ i $(y, f(x))$, gdy punkt y zbliża się do x?

Wzór siecznej to, jak już ustaliliśmy,

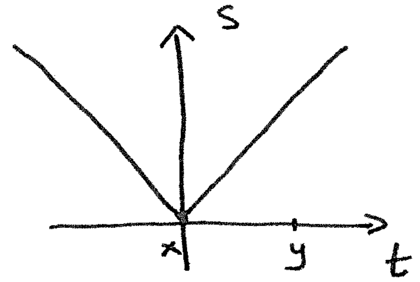
$$s = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x)+f(x)$$

i łatwo, formalnie możemy napisać, że gdy $y \to x$, to powyższy wzór dąży do

$$s = \underbrace{\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}} \cdot (t-x) + f(x).$$

Ta granica może, ale nie musi istnieć:

<u>Przykład 1</u> $\quad f(t) = |t|, \quad x = 0$



Gdy $y>0$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{|y|}{y} = 1$,

więc $\lim_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = 1$

ale dla $y<0$ $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{|y|}{y} = -1$

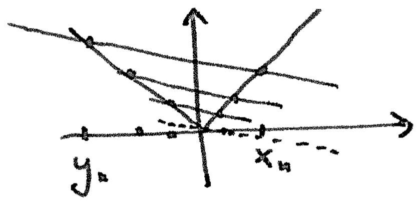
czyli $\lim_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = -1$

Mamy dwie konkurencyjne granice siecznych - styczne: $s = t$ oraz $s = -t$

(choć gdybyśmy patrzyli na

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$ dla różnych ciągów $x_n, y_n \to 0$

dostalibyśmy jeszcze więcej możliwych wyników...



)

Przykład 2

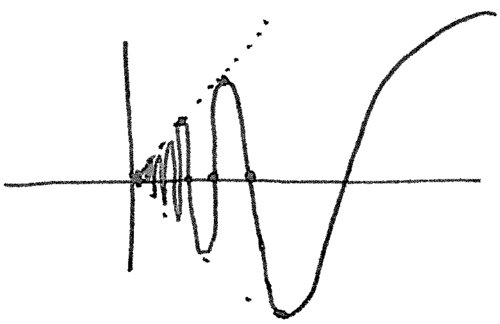
$$f(t) = \begin{cases} t\sin\frac{1}{t} & t\neq 0, \quad x=0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$$

Jeżeli $y_n = \frac{1}{n\pi}$, to $\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x} = \frac{y_n \sin\frac{1}{y_n}}{y_n} = \sin\frac{1}{y_n} =$

$$= \sin n\pi = 0$$

ale gdy $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$,

to $\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x} = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$



i w związku z tym $\lim_{y\to 0} \frac{f(y)-f(0)}{y-0}$

nie istnieje.

Definicja

<u>Pochodną</u> funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w punkcie $x \in A$ nazywamy $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \overset{\text{ozn.}}{=} f'(x), \frac{df}{dx}(x), \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=x}$, $f_t(x)$ itp.

Biorąc w tej definicji granicę prawo- lub lewostronną dostajemy definicję pochodnej lewo- lub prawostronnej.

<u>Uwaga:</u> Aby definicja pochodnej miała sens, punkt x musi
•) należeć do A
••) być punktem skupienia A.

Wiemy już, że jeżeli funkcja f ma w punkcie $x \in A$ pochodną $f'(x)$, to sieczne poprowadzone przez punkty $(x, f(x)), (y, f(y))$ na wykresie dążą, przy $y \to x$, do prostej

$$s = f'(x)(t-x) + f(x)$$

Prostą tę nazywamy <u>styczną do wykresu funkcji f w punkcie x</u>.

Operację obliczania pochodnej nazywamy różniczkowaniem; jeżeli f ma pochodną w x, mówimy, że jest w x różniczkowalna.

Przyzwyczailiśmy się używać x jako zmiennej, więc odtąd będę obliczał pochodne nie w x, ale w x_0 ← wyróżniony punkt.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

często wygodnie też przyjąć $x - x_0 = h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Przykłady

1) $f(x) = C = \text{const}$, to $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$

$$= \frac{C - C}{h} = 0$$

2) $f(x) = x^a$, to $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$
$x_0 > 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^a - x_0^a}{h} = \lim_{h \to 0} x_0^a \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a - 1}{h}$$

$$= x_0^a \lim_{h \to 0} \frac{\exp\left(a \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right) - 1}{a \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h/x_0} \cdot \frac{a}{x_0}$$

$$= a x_0^{a-1}$$

$\Big\{$ a co z $a \in \mathbb{N}$, ~~$x<0$~~ $x \in \mathbb{R}$?
$\underbrace{a \in \mathbb{Z},\ x < 0\ ?}_{\text{proszę sprawdzić, że wzór wciąż działa}}$

3) $f(x) = \exp(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

4) $f(x) = \ln x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h/x_0} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

5) $f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos x_0 .$$

6) sprawdzić, że gdy $f(x) = \cos x$, to $f'(x) = -\sin x$.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to jest w x_0 ciągła.

<u>Dowód</u>

$$\lim_{y\to x_0} f(y) = \lim_{y \to x_0} \left[\underbrace{\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(y-x_0)}_{\to 0} + f(x_0) \right]$$

$$= 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0).$$

$\square$.

Własności arytmetyczne pochodnej:

Tw. Niech $f, g: A \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w $x \in A \cap \operatorname{Acc} A$.

a) dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcja $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x i zachodzi równość $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

(czyli różniczkowanie jest operacją liniową)

b) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x i zachodzi wzór Leibniza

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

c) jeżeli $g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g} : A \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x i

Uzasadnić, że x jest punktem skupienia tego zbioru

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$