Twierdzenie: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona i gdy zbiór punktów nieciągłości N_f funkcji f ma miarę zero.

Nim udowodnimy to twierdzenie, podam inne kryterium, prostsze do udowodnienia, ale trudniejsze w stosowaniu:

Def: Niech $\nu = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ będzie podziałem $[a,b]$.

Oscylacją funkcji f na odcinku $[x_{i-1}, x_i]$, dla $i = 1,2,\dots,n$, nazywamy liczbę $\omega_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$.

(to oczywiście jest skończone, gdy f jest ograniczona na $[x_{i-1}, x_i]$, dla funkcji nieograniczonej mamy $\omega_i = +\infty$.)

Sumą całkową górną związaną z podziałem ν nazywamy $\overline{S}(f,\nu) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$,

analogicznie $\underline{S}(f,\nu) = \sum\limits_{k=1}^{n} \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$ nazywamy sumą całkową dolną.

(Proszę zauważyć, że gdy f nie jest ciągła, to $\overline{S}(f,\nu)$ i $\underline{S}(f,\nu)$ nie muszą być sumami całkowymi w sensie wcześniejszej definicji, tzn. nie muszą istnieć punktowania dające takie sumy)

Prosta, ale ważna obserwacja (pochodząca chyba od Gastona Darboux):

<u>Lemat</u>: Niech μ, ν będą podziałami $[a,b]$. Jeżeli μ jest rozdrobnieniem (zagęszczeniem) ν, tzn. $\nu \subset \mu$, a funkcja f jest ograniczona, to

$$\overline{S}(f,\mu) \leq \overline{S}(f,\nu)$$

$$\underline{S}(f,\mu) \geq \underline{S}(f,\nu).$$

<u>Dowód</u>: Wystarczy sprawdzić, że suma całkowa górna nie rośnie, gdy μ powstaje z ν przez dodanie jednego punktu:

$$\nu = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad \mu = \{x_0, \dots, x_{i-1}, y, x_i, \dots, x_n\}.$$
$$x_{i-1} \leq y < x_i$$

$$\overline{S}(f,\nu) - \overline{S}(f,\mu) = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1},y]} f \cdot (y - x_{i-1}) - \sup_{[y,x_i]} f \cdot (x_i - y),$$

co oczywiście jest ≥ 0, bo

$$\sup_{[x_{i-1},y]} f \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \quad \text{oraz} \quad \sup_{[y,x_i]} f \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f.$$

Rachunek dla sum całkowych dolnych jest analogiczny, z inf w miejsce sup.

Weźmy teraz dowolny ciąg podziałów (ν_k) t.ż. każdy kolejny jest rozdrobnieniem następnego: $\nu_k \subset \nu_{k+1}$, oraz że $\delta(\nu_k) \to 0$.

Na przykład ν_k może być podziałem $[a,b]$ na 2^k równych odcinków: $x_i = a + \frac{b-a}{2^k} \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, 2^k$.

Wtedy ciąg $\overline{S}(f,\nu_k)$ jest nierosnący $\Rightarrow$ ma granicę. Analogicznie $\underline{S}(f,\nu_k)$ jest niemalejący.

Czy granice te są równe? Czy zależą od wyboru ciągu (ν_k)?

Na pierwsze pytanie odpowiedź jest NIE.

Mamy oczywiste nierówności

$$\overline{S}(f,\nu_k) \geq \lim_{k\to\infty} \overline{S}(f,\nu_k) \geq \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f,\nu_k) \geq \underline{S}(f,\nu_k)$$

ale biorąc $f = f_D = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ na $[0,1]$

widzimy, że (dla dowolnego podziału ν)

$$\overline{S}(f_D,\nu) = 1 = \lim_{k\to\infty} \overline{S}(f,\nu_k)$$

$$\underline{S}(f_D,\nu) = 0 = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f,\nu_k).$$

Na drugie pytanie - odpowiedź za chwilę.

Def: <u>Górną całkę Darboux</u> z funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt = \inf\left\{\overline{S}(f,\nu) : \nu \text{ jest podziałem } [a,b]\right\}$$

analogicznie

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \sup\left\{\underline{S}(f,\nu) : \nu \text{ jest podziałem } [a,b]\right\}$$

nazywamy <u>dolną całką Darboux</u>.

<u>Prosta własność</u>:

Dla dowolnych podziałów μ, ν mamy

$$\overline{S}(f,\mu) \geq \overline{S}(f,\mu\cup\nu) \geq \underline{S}(f,\mu\cup\nu) \geq \underline{S}(f,\nu),$$

co natychmiast daje

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt \geq \underline{\int_a^b} f(t)\,dt .$$

<u>Twierdzenie</u>: Niech (ν_k) będzie ciągiem podziałów takim, że $\delta(\nu_k) \to 0$. Wówczas ciąg $\overline{S}(f,\nu_k)$ jest zbieżny do $\int_a^b f(t)\,dt$, zaś $\underline{S}(f,\nu_k)$ do $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$.

∀ funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ niech będzie ograniczona

Udowodnię twierdzenie dla sum całkowych górnych, dla dolnych dowód jest analogiczny.

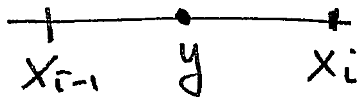
Najpierw ~~L~~

<u>Lemat:</u> Niech μ będzie podziałem $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ niech będzie ograniczona, a podział μ' niech będzie zagęszczeniem μ t.ż. $\#\mu' = \#\mu + k$.

Wówczas
$$\overline{S}(f,\mu) - \overline{S}(f,\mu') \leq 3k \cdot \sup_{[a,b]}|f| \cdot \delta(\mu).$$

<u>Dowód</u>

Załóżmy najpierw, że $\#\mu' = \#\mu + 1$, tj μ' powstaje z μ przez dodanie jednego punktu:



Wtedy
$$\overline{S}(f,\mu) - \overline{S}(f,\mu') = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) -$$
$$- \sup_{[x_{i-1},y]} f \cdot (y - x_{i-1}) - \sup_{[y,x_i]} f \cdot (x_i - y) \leq$$
$$\leq 3 \cdot \sup_{[a,b]}|f| \cdot \delta(\mu).$$

Dodając do podziału kolejne punkty dostajemy kolejne wyrazy tego samego typu, więc przez prostą indukcję dostajemy tezę.

Niech teraz $G = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$. Z definicji całki górnej

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\text{podział } \mu_\varepsilon}$ t.ż. $G \leq \overline{S}(f, \mu_\varepsilon) \leq G + \varepsilon$.

Mamy też $G \leq \overline{S}(f, \mu_\varepsilon \cup \nu_k) \leq \overline{S}(f, \mu_\varepsilon) < G + \varepsilon$.

$\mu_\varepsilon \cup \nu_k$ powstaje z ν_k przez dodanie co najwyżej $\# \mu_\varepsilon$ punktów podziału, więc z Lematu

$$G \leq \overline{S}(f, \nu_k) \leq \overline{S}(f, \mu_\varepsilon \cup \nu_k) + 3\#\mu_\varepsilon \cdot \sup_{[a,b]} |f| \cdot \delta(\nu_k)$$

$$(*) \qquad \leq G + \varepsilon + 3\#\mu_\varepsilon \cdot \sup_{[a,b]} |f| \cdot \delta(\nu_k)$$

Stąd $\liminf\limits_{k\to\infty} \overline{S}(f, \nu_k) \geq G$

$\limsup\limits_{k\to\infty} \overline{S}(f, \nu_k) \leq G + \varepsilon$

z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy, że obie te granice są równe G, zatem $\overline{S}(f, \nu_k) \to G$. $\square$.

<u>Uwaga:</u> po drodze w zasadzie udowodniliśmy

<u>Wniosek:</u> $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \; \delta(\nu) < \delta \Rightarrow G \leq \overline{S}(f, \nu) \leq G + 2\varepsilon$

<u>Dowód:</u> Wystarczy w $(*)$ wziąć, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, δ takie, że $3\#\mu_\varepsilon \sup_{[a,b]} |f| \cdot \delta \leq \varepsilon$.

No to obiecane kryterium:

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ograniczona.

<u>Twierdzenie</u>: Następujące warunki są równoważne

a) f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$

b) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}$ dla każdego podziału ν t.że $\delta(\nu)<\delta$ mamy $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$

c) Górna i dolna całka Darboux są równe.

<u>Dowód</u>: a) $\Rightarrow$ c)

Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{\nu,P}\ \delta(\nu)<\delta\Rightarrow\left|S(f,\nu,P)-\int_a^b f(t)\,dt\right|<\varepsilon$

Ustalmy ν i weźmy ciąg punktowań $P_k=\{\xi_i^k\}$ t.ż. $f(\xi_i^k)\xrightarrow{k\to\infty}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f$; wtedy $S(f,\nu,P_k)\xrightarrow{k\to\infty}\overline{S}(f,\nu)$.

Z nierówności $\left|S(f,\nu,P_k)-\int_a^b f(t)\,dt\right|<\varepsilon$ wynika zatem, ~~przech~~ gdy bierzemy $k\to\infty$, nierówność $\left|\overline{S}(f,\nu)-\int_a^b f(t)\,dt\right|\le\varepsilon$. Wiemy jednak z Wniosku, że, o ile tylko $\delta(\nu)$ jest dost. mała ($<\delta'$), to $\left|\overline{S}(f,\nu)-\overline{\int} f(t)\,dt\right|\le 2\varepsilon$. Stąd, o ile tylko $\delta(\nu)<\min(\delta,\delta')$, mamy $\left|\int_a^b f(t)\,dt-\overline{\int_a^b} f(t)\,dt\right|<3\varepsilon$,

co z dowolności $\varepsilon>0$ oznacza, że całka górna z f

jest równa $\int_a^b f(t)dt$. Analogicznie dowodzimy, że

$\underline{\int_a^b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$, a więc całki górna i dolna

są równe.

c) $\Rightarrow$ a)

Wiemy, że, o ile tylko średnica podziału ν jest dostatecznie mała ($<\delta$), to

$$-2\varepsilon + \underline{\int_a^b} f(t)dt \le \underline{S}(f,\nu) \le S(f,\nu,P) \le \overline{S}(f,\nu) \le \overline{\int_a^b} f(t)dt + 2\varepsilon$$

$$\overline{} \!\! \| $$

$$-2\varepsilon + \overline{\int_a^b} f(t)dt.$$

Tak więc, o ile $\delta(\nu) < \delta$, mamy

$$\left| S(f,\nu,P) - \overline{\int_a^b} f(t)dt \right| < 2\varepsilon,$$

co oznacza, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ i $\overline{\int_a^b} f(t)dt$ jest jej całką.

c) $\Rightarrow$ b)

$$\sum_{i=1}^m \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f,\nu) - \underline{S}(f,\nu) \le$$

$$\le \overline{\int_a^b} f(t)dt + 2\varepsilon - \left(\int_a^b f(t)dt - 2\varepsilon \right) = 4\varepsilon,$$

o ile tylko podział ν jest dostatecznie drobny.

b) $\Rightarrow$ c)

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f,\nu) - \underline{S}(f,\nu) < \varepsilon$$

$\overline{S}(f,\nu)$ $\uparrow$ oddalone od $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$ o co najwyżej 2ε

$\underline{S}(f,\nu)$ $\uparrow$ oddalone od $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$ o co najwyżej 2ε

o ile podział ν jest dost. drobny.

Stąd, o ile $\delta(\nu) < \delta'$, mamy $\left| \overline{\int_a^b} f(t)\,dt - \underline{\int_a^b} f(t)\,dt \right| < 5\varepsilon$

i z dowolności $\varepsilon > 0$ całki górna i dolna są równe. $\square$

~~Na tym zakończę dowód omawianego twierdzenia~~

Do dowodu twierdzenia o mierze zbioru nieciągłości funkcji całkowalnej w sensie Riemanna potrzebujemy jeszcze jednego ważnego pomocniczego twierdzenia.

Twierdzenie (Lebesgue'a o liczbie Lebesgue'a)

Niech $\{I_t\}_{t\in T}$ będzie pokryciem zbioru zwartego $K\subset\mathbb{R}$ odcinkami otwartymi. Istnieje wówczas liczba $\lambda>0$ (zwana liczbą Lebesgue'a pokrycia $\{I_t\}$) o tej własności, że każdy podzbiór zbioru K o średnicy $\leq\lambda$ leży w pewnym odcinku I_t pokrycia, tj.

$$A\subset K,\ \operatorname{diam} A\leq\lambda \Rightarrow \exists_{t\in T}\ A\subset I_t.$$

Dowód: Załóżmy przeciwnie: dla każdego $n\in\mathbb{N}$ istnieje $B_n\neq\emptyset$, $\operatorname{diam} B_n\leq\frac{1}{n}$ takie, że $\forall_{t\in T}\ B_n\not\subset I_t$, a więc $I_t\setminus B_n\neq\emptyset$.

Możemy teraz z każdego B_n wybrać element x_n, dostajemy w ten sposób ciąg (x_n), z którego można wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do pewnego $b\in K$.

Skoro $\{I_t\}_{t\in T}$ jest pokryciem K, to znajdziemy $t_b\in T$ t.że $I_{t_b}\ni b$; skoro I_{t_b} jest otwarty, to $\exists_{\delta>0}$ t.że $(b-\delta, b+\delta)\subset I_{t_b}$

Niech teraz k będzie tak duże, by

- $|x_{n_k} - b| < \frac{\delta}{2}$
- $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$

$\Downarrow$

diam B_{n_k}

Wtedy $\forall_{x \in B_{n_k}}$ $|x-b| < |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - b| <$

$< \operatorname{diam} B_{n_k} + \frac{\delta}{2}$

$< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, a więc

$B_{n_k} \subset (b-\delta, b+\delta) \subset I_{t_b}$, wbrew założeniu. ↯

□.

No to wreszcie udowodnijmy

<u>Twierdzenie</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczona i zbiór $\hat{N}_f^{[a,b]}$ punktów, w których f nie jest ciągła ma miarę zero.

$\Longrightarrow$

Załóżmy, że f jest cwsR. Wtedy, z b),

$\forall_{m\in\mathbb{N}}\ \exists_{\delta_m>0}$ tż dla każdego podziału ν,

(*) jeżeli $\delta(\nu)<\delta_m$, to $\sum_i \omega_i(x_i-x_{i-1}) < \frac{1}{m}$

Niech μ_m będzie podziałem $[a,b]$ na n_m równych odcinków, z $n_m > m$, takim, że spełniony jest warunek (*)

Ustalmy $\alpha>0$, niech $\sigma_m(\alpha)$ będzie sumą dług. tych odcinków podziału μ_m, dla których $\omega_i>\alpha$.

Mamy

$$\alpha\cdot\sigma_m(\alpha) < \sum_{\{j:\,\omega_j>\alpha\}} \omega_j(x_j-x_{j-1}) \le \sum_{i=1}^{n_m}\omega_i(x_i-x_{i-1}) < \frac{1}{m}$$

$$\Longrightarrow \sigma_m(\alpha) < \frac{1}{m\alpha}.\ \text{Stąd } \sigma_m(\alpha)\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

<u>Def</u>: Oscylacja f w punkcie $x\in[a,b]$ to

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0}\Big(\sup_{[x-\delta,x+\delta]} f - \inf_{[x-\delta,x+\delta]} f\Big)$$

Proste <u>zadanko</u>: f ciągła w $x \Leftrightarrow \omega_f(x)=0$

<u>Obserwacja</u>: Jeżeli $y\in(x_{i-1},x_i)$, to $\omega_f(y)\le\omega_i$

Oznaczmy przez N_α zbiór tych $x \in [a,b]$, dla których $\omega_f(x) > \alpha$.

~~Mamy N_α~~ $x \in N_\alpha \Rightarrow x = x_i$ dla $i=0,1,\dots,n$ lub $x \in (x_{i-1}, x_i)$ dla $i=1,\dots,n$ i $\omega_f(x) > \alpha$

$$\Downarrow$$

$$\omega_i > \alpha$$

Stąd $N_\alpha \subset \{x_0,\dots,x_n\} \cup \bigcup_{\{i:\omega_i>\alpha\}} [x_{i-1}, x_i]$

$$|N_\alpha| \le 0 + \sigma_m(\alpha) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

stąd N_α jest miary zero $(\forall_{\alpha>0})$.

$N_f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_{1/k}$ też jest miary zero.

$\Leftarrow$ Niech $|N_f| = 0$, $|f| \le M$.

① $\forall_{y\notin N_f} \exists_{\delta_y>0} \forall_{z\in[a,b]\cap(y-\delta_y, y+\delta_y)} |f(z)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

(tj $|z-y|<\delta_y$)

② N_f możemy pokryć odcinkami otwartymi (I_n) t. że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{5M}.$$

Nieznacznie powiększając każdy z I_n do odc. otw. $\tilde{I}_n$,

$$I_n \subset \tilde{I}_n, \quad |\tilde{I}_n| = |I_n| + \frac{\varepsilon}{20M \cdot 2^n}$$

$$\sum_n |\tilde{I}_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

$\{\tilde{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\{(y-\delta_y, y+\delta_y)\}_{y\in[a,b]\setminus N_f}$ to pokrycie $[a,b]$; wybieramy podpokrycie skończone.

$$\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k, \quad (y_1-\delta_1, y_1+\delta_1), \dots, (y_m-\delta_m, y_m+\delta_m)$$

$\delta_1 = \delta_{y_1}$

λ liczba Lebesgue'a λ.

Bierzemy podział μ, $\delta(\mu) < \lambda$.

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i:[x_{i-1},x_i]\subset(y_m-\delta_m,\, y_m+\delta_m)} \omega_i (x_i - x_{i-1})$$

$$+ \sum_{\text{pozost. } i} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = S_1 + S_2$$

z ① w pierwszej sumie $\omega_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, więc $S_1 \le \frac{\varepsilon}{2}$

z ② $\omega_i \le 2M$, $S_2 \le 2M \sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{I}_i| \le 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$

więc $\sum_{i=0}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon$. $\square$.