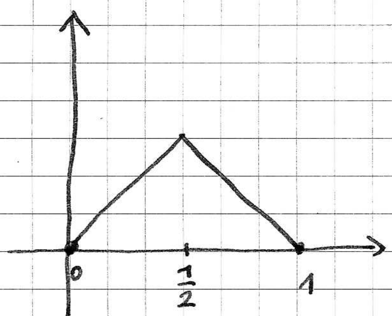
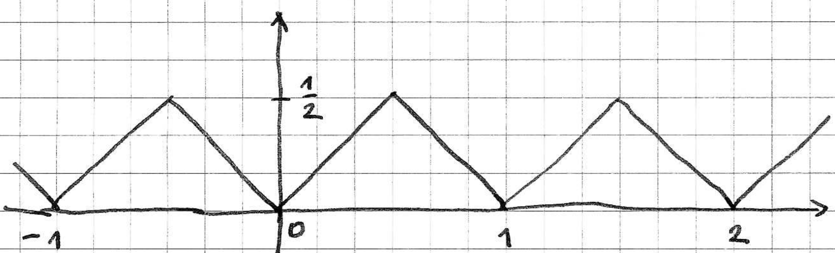
Przykład van der Waerdena funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej

Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996)

Rozważmy na $[0,1]$ funkcję $d(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$



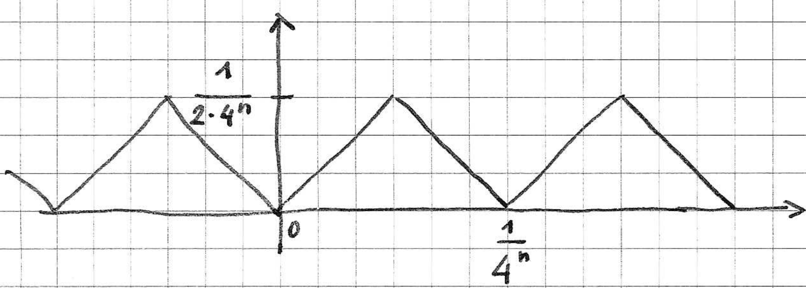
i rozszerzmy ją do funkcji okresowej (dalej oznaczonej przez d), o okresie 1, określonej na $\mathbb{R}$:



Łatwo można sprawdzić, że $d(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$

Jest to oczywiście funkcja ciągła, kawałkami liniowa, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} d(x) = \frac{1}{2}$, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} d(x) = 0$.

Niech teraz $d_n(x) = 4^{-n} d(4^n x)$: $\quad (d_0(x) = d(x))$



$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} d_n(x) = \frac{1}{2 \cdot 4^n}$

$\inf d_n(x) = 0.$

Niech teraz $W(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(x)$.

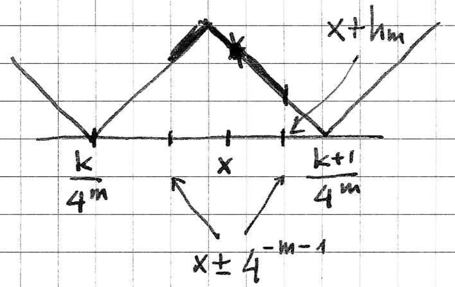
Z kryterium Weierstrassa: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \; |d_n(x)| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^n} < \infty$,

więc szereg definiujący funkcję W jest jednostajnie zbieżny.

To dowodzi, że funkcja W jest ciągła.
Wykażemy teraz, że W nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Ustalmy bowiem punkt $x \in \mathbb{R}$. Skonstruujemy ciąg (h_m), $0 \neq h_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, taki, że nie istnieje granica $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m}$.

Dla konkretnego, ustalonego m h_m dobieramy tak: popatrzmy, jak w pobliżu x wygląda wykres d_m:



W lewo lub w prawo od x (być może w obie strony) funkcja d_m jest, na odcinku długości $\frac{1}{4^{m+1}}$, liniowa (na rysunku w prawo).

Dobieramy h_m tak, by $|h_m| = \frac{1}{4^{m+1}}$, a znak taki, by d_m była liniowa między x a $x+h_m$.

Zauważmy, że jeżeli d_m jest liniowa między x a $x+h_m$, to $\forall_{0 \le n < m}$ d_n też jest liniowa, o wsp. kierunkowym ± 1.

Stąd, $\forall_{n \le m}$ $\frac{d_n(x+h_m)-d_n(x)}{h_m} = \frac{\pm h_m}{h_m} = \pm 1$.

Jeżeli natomiast $n > m$, to funkcja d_n jest okresowa, o okresie $\frac{1}{4^n}$, a więc

$$d_n(x+h_m) - d_n(x) = d_n\left(x \pm 4^{-(m+1)}\right) - d_n(x) =$$
$$= d_n\left(x \pm 4^{n-m-1}\cdot\frac{1}{4^n}\right) - d_n(x) = d_n(x) - d_n(x) = 0.$$

Stąd $\frac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x+h_m)-d_n(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m} (\pm 1)$,

ta ostatnia liczba, niezależnie od tego, jak układają się znaki, jest parzysta, gdy m jest nieparzyste, a nieparzysta –

gdy m jest parzyste. Ciąg $\dfrac{W(x+h_m)-W(x)}{h_m}$ nie może zatem mieć granicy (a powinien być zbieżny do $W'(x)$).

Pierwszy przykład takiej funkcji podał w 1872 roku Karl Weierstrass:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

gdzie $a\in(0,1)$, b jest nieparzystą liczbą naturalną i $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

Funkcja Weierstrasse

Niech $a \in (0,1)$, b niech będzie nieparzystą liczbą naturalną taką, że $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Definiujemy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$.

Zadanko 1 Wykazać, że f jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech α_m będzie liczbą całkowitą najbliższą $b^m x_0$, tzn. $x_{m+1} := b^m x_0 - \alpha_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Zadanko 2 Wykazać, że

$$y_m = \frac{\alpha_m - 1}{b^m} \longrightarrow x_0^- \quad , \quad z_m = \frac{\alpha_m + 1}{b^m} \longrightarrow x_0^+ .$$

Załóżmy, że f jest różniczkowalna w x_0.

Wtedy $f'_-(x_0) = \lim_{m \to \infty} \frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} =$

$$= \left(\sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \right) a^n \frac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0}$$

$$= S_1 + S_2$$

Zadanie 3 Wykazać, że $|S_1| < \frac{\pi (ab)^m}{ab-1}$

Zadanie 4 Wykazać, że dla $n \geq m$

$$\cos(b^n \pi y_m) = (-1)^{\alpha_m - 1}$$

$$\cos(b^n \pi x_0) = (-1)^{\alpha_m} \cos(b^{n-m} \pi x_{m+1})$$

Zadanie 5 Wywnioskować z Z3 i Z4, że

$$S_2 = (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \cdot A, \text{ gdzie } A \geq \frac{2}{3}$$

Zadanie 6 Wykazać, korzystając z Z3 i Z5,

że $\operatorname{sgn} \frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m}$ i że

$\frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0}$ jest oddzielone od zera jednostajnie względem m, tzn. $\exists_{\eta > 0}$ tż.

$$\forall_m \left| \frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} \right| > \eta$$

Zadanie 7 Powtórzyć zadania Z3 - Z6

z z_m w miejsce y_m i zauważyć, że

$$\operatorname{sgn} \frac{f(z_m) - f(x_0)}{z_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m + 1} \text{ i}$$

$\frac{f(z_m) - f(x_0)}{z_m - x_0}$ jest jednostajnie wzgl. m oddzielone od zera

Zadanie 8 Wywnioskować stąd, że f nie jest różniczkowalna w x_0

Zadanie 9 Wykazać, że w rzeczywistości

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(z_n)-f(x_0)}{z_n-x_0}\right| = +\infty.$$