Udowodniliśmy

## Twierdzenie Peano o wzorze Taylora

Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$, ~~to~~ i

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

to $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Wielomian $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ nazywamy wielomianem Taylora stopnia $n$ funkcji $f$ w $x_0$ (i czasem będziemy używać oznaczenia $T_{n;x_0}f(x)$).

Jest to wielomian najlepiej – spośród wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej $n$ – przybliżający funkcję $f$ w otoczeniu $x_0$, bo to jedyny taki wielomian $W$ spełniający $(f-W)(x) = o((x-x_0)^n)$ (wynika to bardzo prosto z naszego dowodu tw. Peano)

Zadanie: Wykazać, że jeżeli

Przykłady: $\boxed{f \text{ jest wielomianem stopnia } n, \text{ to } \forall_{m\geq n} \forall_{x_0} T_{m;x_0} = f}$

1. $f(x)=e^x$, $x_0=1$.

oczywiście $f^{(k)}(x)=e^x$, więc $f^{(k)}(1)=e$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n) = e\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!} + o((x-1)^n)$$

Zauważmy, że $e\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k!} =$

$$= e\cdot e^{x-1} = e^x,$$

więc $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ r_n(x) = e^x - e\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!} \to 0$

<u>Zadanie</u>: Wykazać, że dla $f(x)=\sin x$ i $x_0=0$ $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$.

Zauważmy, że tw. Peano nic nie mówi o zachowaniu $r_n(x)$ przy rosnącym $n$, a jedynie o tym, że $r_n$, dla ustalonego $n$, szybko dąży do $0$ przy $x\to x_0$. Z drugiej strony dla $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, czy dla $f$ będącej wielomianem wiemy, że ~~$f(x)$~~ $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (przynajmniej dla niektórych $x_0$, choć w rzeczywistości dla wszystkich).

<u>Ważny przykład - zadanie</u>

Rozważmy funkcję $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Łatwo widzimy, że $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, więc tak zdefiniowana funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Dalej, $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} =$

$$= \lim_{t\to\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t e^{t^2}} = 0.$$

<u>Zadanie</u>: Udowodnić, że $f$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $0$ i $\forall_{k\in\mathbb{N}}\ f^{(k)}(0)=0$.

<u>Wniosek</u>: $\forall_n$ wielomian Taylora funkcji $f$ w $0$ jest równy $0$, więc jakość przybliżenia funkcji $f$ jej wielomianem Taylora wokół $0$ nie polepsza się wraz z wzrostem stopnia, a wzór Taylora dla $f$ składa się z samej reszty!

$f(x) = 0 + r_n(x)$, w szczególności, dla ustalonego $x\neq 0$, $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym, o wyrazach $\neq 0$. Nie zachodzi zatem

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Fichtenholz

**Definicja:** Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ ma w $x_0 \in A$

$\underbrace{\text{minimum}/\text{maksimum}}_{\text{ekstremum}}$ lokalne, jeżeli $\exists_{\varepsilon > 0} \; \forall_{x \in A \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}$

$f(x_0) \leq f(x)$ / $f(x_0) \geq f(x)$.

Jeżeli nierówności te dla $x \neq x_0$ są ostre, to mówimy o właściwym minimum/maksimum lokalnym

~~Z tw. Fermata zastosowanego o~~

Jeżeli $A = (a, b)$, to z tw. Fermata zastosowanego do $f$ i przedziału $A \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ widzimy, że $f'(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia w $x_0$ ekstremum lokalnego.

Ale oczywiście nie dostatecznym ($f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).

**Twierdzenie** (o ekstremach lokalnych)

Załóżmy, że $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ jest $n$-krotnie różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ oraz że

$f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Wówczas:

a) jeżeli $n$ jest nieparzyste, to $f$ nie ma w $x_0$ ekstremum lokalnego

b) jeżeli $n$ jest parzyste, to $f$ ma w $x_0$ ekstremum lokalne; jeżeli $f^{(n)}(x_0) > 0$, to jest tam minimum lokalne właściwe, jeżeli $f^{(n)}(x_0) < 0$, to jest tam maksimum lokalne właściwe.

Dowód

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

więc $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right]$

Wiemy, że $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x\to x_0} 0$, więc dla $x$ dost. bliskich $x_0$ (czyli $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$) $\left|\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$.

Wtedy, dla takich $x$, $\operatorname{sgn}\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right] =$
$= \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$ i dla $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn}\left((x-x_0)^n \cdot [\dots]\right) =$

$= \operatorname{sgn}(x-x_0)^n \cdot \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$

Jeżeli teraz $n$ jest nieparzyste, to jaki by nie był znak $f^{(n)}(x_0)$, $\operatorname{sgn}(f(x)-f(x_0))$ będzie się zmieniał ~~przy~~ w zależności od tego, czy $x > x_0$, czy $x < x_0$.

Jeżeli zaś $n$ jest parzyste, to $\operatorname{sgn}(x-x_0)^n = 1$, więc $\operatorname{sgn}(f(x)-f(x_0)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$

i jeżeli $f^{(n)}(x_0) > 0$, to $\forall_{\substack{x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \\ x \neq x_0}} f(x)-f(x_0) > 0$

$f^{(n)}(x_0) < 0$, to ———— " ———— $< 0$.

$\square$.

Inne ważne zastosowanie to obliczanie granic

<u>Zadanie</u>: Znajdź $a \in \mathbb{R}$ takie, że granica

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} t) - \operatorname{tg}(\sin t)}{t^a}$$

jest skończona i $\neq 0$.

<u>Heurystyka</u>: rozwińmy licznik we wzór Taylora wokół 0. ~~Ta~~ Jest on postaci $\alpha_k t^k + o(t^k)$ dla pewnego $k$, i granica z treści będzie istniała i będzie $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a = k$; wtedy granica równa jest $\alpha_k$.

Moglibyśmy liczyć pochodne licznika, ale nie warto.

Wiemy, że $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + o(t^{\cdots})$ –

– umiemy wypisać wzór Taylora dowolnie wysokiego stopnia.

Gorzej z tangensem – tu musimy się naliczyć.

$f(t) = \operatorname{tg} t$, to $f'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, $f''(t) = 2\operatorname{tg} t\,(1+\operatorname{tg}^2 t)$,

$f'''(t) = 2\cdot(1+\operatorname{tg}^2 t)^2 + (2\operatorname{tg} t)^2$, $f^{(4)}(t) = 4\,(1+\operatorname{tg}^2 t)^2\cdot 2\operatorname{tg} t$

$+ 8\operatorname{tg} t\,(1+\operatorname{tg}^2 t)$ itd.; $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$,

$f'(0) = 1$, $f'''(0) = 2$.

Stąd $\operatorname{tg} t = t + \frac{2}{3!}t^3 + o(t^4) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$.

$$\operatorname{tg}(\sin t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{\left(t - \frac{t^3}{6}\right)^3}{3} + o(t^4)$$

$$= t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^3}{3} + o(t^4) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$\sin(\operatorname{tg} t) = \sin\left(t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)\right) = t + \frac{t^3}{3} - \frac{\left(t + \frac{t^3}{3}\right)^3}{6} + o(t^4)$$

$$= t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{6} + o(t^4) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

i dostajemy tylko, że

$\sin(\operatorname{tg} t) - \operatorname{tg}(\sin t) = o(t^4)$. Za mało, chcieliśmy mieć pierwszy niezerowy (tzw. wiodący) wyraz wzoru Taylora... Trzeba rozwinąć tangens staranniej, co najmniej do wyrazów stopnia 5...

Przy okazji: wyszło nam, że parzyste pochodne ~~ta~~ sinusa w 0 znikają, podobnie dla tangensa

Zadanie:

Wykazać, że jeżeli $f$ jest parzysta i $n$-krotnie różniczkowalna w 0, to wszystkie jej ~~niep~~ pochodne nieparzystego stopnia w 0 są zero.
Analogicznie, jeżeli $f$ jest nieparzysta (jak sinus czy tangens), to wszystkie jej parzyste pochodne w zerze znikają

# Postaci reszty we wzorze Taylora

Aby staranniej badać resztę $r_n(x)$ z wzoru Taylora, w szczególności – jej zachowanie dla różnych $n$, musimy wiedzieć coś więcej niż tylko to, że $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

Potrzebujemy do tego nieco silniejszych założeń na $f$: Załóżmy, że $f$ jest nie tylko $n$-krotnie różniczkowalna w $x_0$, ale że jest <u>$(n+1)$-razy różniczkowalna w pewnym otoczeniu $x_0$</u>.

Przypomnę, że $T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $r_n(x) = f(x) - T_{n,x_0} f(x)$. Ustalmy $x$ w otoczeniu $x_0$.

Wprowadźmy pomocniczą funkcję

$$\varphi(z) = f(x) - T_{n,z} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k.$$

Łatwo sprawdzamy, że $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(x)$.

Dalej, dla ustalenia uwagi, przyjmijmy $x > x_0$ (ale $x < x_0$ idzie tak samo).

Z naszych założeń $\varphi$ jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna na $(x_0, x)$,

$$\varphi'(z) = -\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k + \frac{f^{(k)}(z)}{k!}\cdot k(x-z)^{k-1}\cdot(-1)\right]$$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k + \sum_{k=\cancel{0}1}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!}(x-z)^{k-1}$$

$$\cancel{= -\left(\frac{f'(z)}{1}f(z) + \frac{f''(z)}{1!}(x-z) + \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)\right)}$$

$$= \left(-\frac{f'(z)}{0!} - \frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n\right.$$

$$\left. + \frac{f'(z)}{0!} + \frac{f''(z)}{1!}(x-z) + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Wybierzmy $\psi(z)$ ciągłą, ściśle monotoniczną na $[x_0, x]$ i różniczkowalną wewnątrz.

Z tw. Cauchy'ego istnieje $\xi \in (x_0, x)$

$$\frac{-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$ skąd

$$r_n(x) = \varphi(x_0) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\left(\psi(x)-\psi(x_0)\right)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\,\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)}.$$

Dla różnych $\psi$ dostajemy różne postaci reszty:

$$\psi(z) = (x-z)^{n+1}$$

daje resztę w postaci Lagrange'a:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\psi(z) = x-z$$

daje resztę w postaci Cauchy'ego

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

możemy też brać $(x-z)$ w innych potęgach lub inne funkcje monotoniczne (choć te 2 postaci są najistotniejsze w zastosowaniach).