Krótkie przypomnienie tego, co już wiemy o pochodnych

Definicja: Pochodną funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in A \cap \operatorname{Acc} A$ nazywamy granicę

punkty skupienia zbioru A

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Jeżeli ta granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że f jest różniczkowalna w x_0; pochodną tę oznaczamy $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} f$, $f_x(x_0)$, $f_{,x}(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$ itp...

Jeżeli f jest różniczkowalna we wszystkich punktach zbioru $B \subset A$, to mówimy, że f jest różniczkowalna w/na B. W ten sposób możemy o pochodnej myśleć jako o funkcji, przypisującej punktom, w których f jest różniczkowalna, wartość pochodnej w tych punktach:

$$x_0 \xmapsto{f'} f'(x_0).$$

W tych punktach x_0 zbioru A, w których jest sens liczyć granice lewo- lub prawostronne, jest sens mówić o lewo- i prawostronnej pochodnej; oznaczamy je odpowiednio $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$.

Możemy też mówić o nieskończonych pochodnych w punkcie, jeżeli granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ jest nieskończona. Na przykład funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}$ ma w $x_0 = 0$ lewostronną pochodną równą $-\infty$, a prawostronną $+\infty$, oczywiście nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Wprost z arytmetycznych własności granicy mamy

Twierdzenie: pochodna jest operacją liniową, tzn. jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in A$, to

(·) dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ $\quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

jeżeli $f, g: A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $x_0 \in A$, to

(··) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Udowodniliśmy też

(∴) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(wzór Leibniza)

oraz, jeżeli $g(x_0) \neq 0$, to

$$(::) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Wykazaliśmy też prosty, ale ważny i przydatny fakt:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to jest w x_0 ciągła.

Kolejne ważne twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> (o pochodnej złożenia):

Jeżeli $g: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in A$, $f: B \to \mathbb{R}$ i $B \supset g(A)$ oraz f jest różniczkowalna w $g(x_0)$, to $f \circ g: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x_0 oraz $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

<u>Przykład zastosowania</u>:

Niech $f(x) = (g(x))^{h(x)}$, gdzie $g: A \to (0, \infty)$ i funkcje g, h są różniczkowalne w $x_0 \in A$.

Wówczas

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} \exp(h(x) \cdot \ln g(x)) =$$

$$= \exp'(h(x) \cdot \ln g(x)) \cdot (h(x) \cdot \ln g(x))' =$$

$$= \exp(h(x) \cdot \ln g(x)) \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\right) =$$

$$=(g(x))^{h(x)}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln g(x)+\frac{h(x)g'(x)}{g(x)}\right).$$

W powyższym rachunku skorzystaliśmy z tego, że $\exp'(x)=\exp(x)$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Przypomnijmy pozostałe, ważne pochodne funkcji elementarnych.

- jeżeli $f=\text{const}$, to $f'\equiv 0$ w tych punktach dziedziny, w których jest sens mówić o pochodnej, a więc w nieizolowanych punktach dziedziny.

- dla wszystkich $a\in\mathbb{R}$ $(x^a)'=ax^{a-1}$

  dla $a<0$ ta funkcja ma sens tylko dla $x>0$

- $(\exp(x))'=\exp(x)$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
- $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$

  $(\tan x)'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}\,x)'=-(1+\mathrm{ctg}^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Łatwo możemy jeszcze sprawdzić, że

$$(\cosh x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

$$(\sinh x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x.$$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Załóżmy, że $f: A \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowa na A, różniczkowalna w $x_0 \in A$ i funkcja $f^{-1}: f(A) \to A$ jest ciągła w $f(x_0)$ oraz że $f'(x_0) \neq 0$.

Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$ i zachodzi równość $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Dowód:

Niech $H(h) = f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)$.

Z ciągłości f^{-1} w y_0 wiemy, że $\lim\limits_{h \to 0} H(h) = 0$.

Zauważmy też, że $f(x_0 + H(h)) - f(x_0) =$

$$= f(x_0 + f^{-1}(y_0+h) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}) - f(x_0) = y_0 + h - f(x_0) = h$$

Stąd

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{H(h)}{f(x_0+H(h)) - f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ bo } H(h) \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

$\square$

Zauważmy, że wszystkie założenia twierdzenia, poza ciągłością $f^{-1}(y_0)$, są konieczne do jego sformułowania: różnowartościowość f by móc mówić o f^{-1}, różniczkowalność f w x_0 i to, że $f'(x_0) \neq 0$ - - by móc napisać $\frac{1}{f'(x_0)}$. A założenie o ciągłości f^{-1} w $y_0 = f(x_0)$ ma inny charakter. Może jest niepotrzebne?

<u>Zadanie 1</u> Niech $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq \frac{1}{n},\ x \neq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 4 \\ \frac{1}{n + [\sqrt{n}]} & x = \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 4 \\ \frac{1}{n^2 + n - 1} & x = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geq 4 \end{cases}$$

Funkcję f możemy rozszerzyć na $(-1,1)$ wzorem $f(-x) = -f(x)$.

Wykazać, że (1) f jest różniczkowalna w 0 i $f'(0) \neq 0$

(2) f jest różnowartościowa na $(-1,1)$

(3) f^{-1} nie jest ciągła w $f(0) = 0$ (więc nie może być w 0 różniczkowalna).

<u>Zadanie 2</u>: Zastąpmy założenie o ciągłości f^{-1} w y_0 ciągłością f na całym A:

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie różnowartościowa na A, różniczkowalna w $x_0 \in A$ i ciągła na A. Czy wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w $f(x_0)$? (podpowiedź: nie, skonstruuj kontrprzykład)

<u>Zadanie 3</u>: A jeżeli A jest przedziałem?

Jeszcze przykład zastosowania.

Funkcja odwrotna do $f(x) = \tan x$, określonej na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, nazywana jest arkus-tangensem i oznaczana arctan (lub, czasem, arctg)

Niech $y_0 = \tan x_0$. Wtedy

$$(\arctan)'(y_0) = \frac{1}{(\tan)'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

czyli $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

<u>Zadanie</u>: Sprawdzić, że ~~...~~ funkcja odwrotna do sinusa, ograniczonego do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, oznaczana arcsin, spełnia

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dla } x \in (-1,1)$$

Zadanie: Funkcja cos, ograniczona do $[0,\pi]$, jest różnowartościowa, a odwrotną do niej nazywamy arccos (arkus-kosinusem). Wylicz, że $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Dlaczego wychodzi to samo, co dla arcsin x?

Wróćmy jeszcze do geometrycznej interpretacji pochodnej:

Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, to styczną do wykresu f w punkcie $x_0\in(a,b)$ nazywamy granicę siecznych, tj prostych poprowadzonych przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ na wykresie f, przy $x\to x_0$. Ustaliliśmy, że gdy f jest różniczkowalna w x_0, to granica taka istnieje i jest prostą o wzorze $y = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f'(x_0)$.

Wspominałem już, że styczna jest prostą najlepiej przybliżającą wykres f w pobliżu x_0 – warto byłoby nadać temu „najlepiej" sens matematyczny.

__Umowa__ (symbole Peano)

Jeżeli f i g są funkcjami określonymi w otoczeniu $x_0 \in \mathbb{R}$, to piszemy

$$f(x) = o(g(x)) \text{ przy } x \to x_0, \text{ gdy } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)), \text{ przy } x \to x_0, \text{ gdy iloraz } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ jest,}$$

dla x dost. bliskich x_0, ograniczony.

__Intuicje:__ $\underset{(\text{przy } x\to x_0)}{f(x) = o(g(x))}$, gdy f dąży, przy $x \to x_0$, do zera szybciej niż g; $f(x) = O(g(x))$, gdy obie funkcje są w otoczeniu x_0 porównywalne.

Nas najczęściej interesować będą $g(x) = (x-x_0)^k$, gdzie $k \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{R}_+$ ← w tym przypadku z reguły pomijamy dopisek „przy $x \to x_0$", domyślając się, o jakie x_0 chodzi, z postaci funkcji g.

Oczywiście jeżeli $f(x) = o(g(x))$ przy $x \to x_0$, to $f(x) = O(g(x))$ przy $x \to x_0$.

__Przykłady:__

$$\begin{aligned} \sin x &= o(x^{1/2}) \\ &= O(x) \\ &= o((x-\pi)^{2/3}) \\ &= \underset{\text{przy } x\to 0}{o(1)} \leftarrow \text{dąży do 0 przy } x \to 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 x^3 &= o(x-2) \\ &= o(x^2) \end{aligned}$$

Chcemy przybliżyć możliwie najlepiej w otoczeniu x_0 wykres funkcji f prostą – a więc wykresem funkcji liniowej $a(x-x_0)+b = s(x)$.

Błąd tego przybliżenia to $f(x)-s(x) =$

$$= f(x) - a(x-x_0) - b =: D(x)$$

Chcemy, by $D(x)$ jak najszybciej malało przy $x \to x_0$.

Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0, to również D jest różniczkowalna w x_0, w szczególności jest w x_0 ciągła; $D(x_0) = \lim_{x\to x_0} D(x) = f(x_0) - b$.

Jeżeli więc chcemy, by $\lim_{x\to x_0} D(x) = 0$, musimy mieć $b = f(x_0)$ $\leftarrow$ wtedy $D(x) = \underset{\text{przy } x\to x_0}{o(1)}$

(Jeżeli $b \neq f(x_0)$, to $D(x) = O(1)$, ale nie $\underset{\text{przy } x\to x_0}{o(1)}$)

Teraz pomanipulujmy a i sprawdźmy, czy mamy szansę na $D(x) = O(x-x_0)$, a może nawet $D(x) = o(x-x_0)$ przy $x \to x_0$.

$$\frac{D(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0) - a.$$

Jeżeli zatem $a \neq f'(x_0)$, to $D(x) = O(x-x_0)$, ale już nie $o(x-x_0)$. Jeżeli jednak $a = f'(x_0)$, to $D(x) = o(x-x_0)$. Ale wtedy $s(x) =$

$$= a(x-x_0)+b = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{wzór stycznej w } x_0.}.$$

Zadanie: Wykaż, że $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in A \cap \operatorname{Acc} A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) - f(x_0) - a(x-x_0) = o(x-x_0).$$

Zadanko: Znaleźć $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłą i taką, że $f(0)=0$ i dla każdego $a \in \mathbb{R}$

$$f_k(x) - ax = O(x^k), \text{ ale nie } o(x^k).$$

dla $k = 1, 2, \dots$

Twierdzenia, które sprawiają, że pochodne są użyteczne

<u>Tw. Fermata</u>: Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ przyjmuje w $x_0\in(a,b)$ minimum lub maksimum i jest w x_0 różniczkowalna, to $f'(x_0)=0$.

<u>Dowód</u>: (wystarczy dla minimum w x_0, dla maksimum dowód jest analogiczny).

- dla $x\in(a,b)$ $\quad f(x)-f(x_0)\geq 0$, (bo f ma w x_0 minimum)
- za to $x-x_0>0$ dla $x>x_0$,
  $x-x_0<0$ dla $x<x_0$,

więc w zależności od tego, czy $x\to x_0$ z prawej, czy z lewej strony, iloraz różnicowy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

jest nieujemny lub niedodatni;

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=f'(x_0)\geq 0\\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=f'(x_0)\leq 0\end{aligned}\right|\Rightarrow f'(x_0)=0.$$

<u>Wniosek</u>: Mamy zadanie: znajdź minimum/maksimum funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Z tw. Weierstrassa wiemy, że zarówno minimum, jak i maksimum są osiągane w pewnych punktach x_m i $x_M\in[a,b]$.

Z tw. Fermata wiemy, że punkty x_m i x_M znajdziemy na nast. liście:

Lista punktów podejrzanych:

- końce odcinka, czyli a i b
- punkty, w których f' ma miejsca zerowe
- punkty, w których f nie jest różniczkowalna.

Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie Rolle'a

Michel Rolle
1652-1719

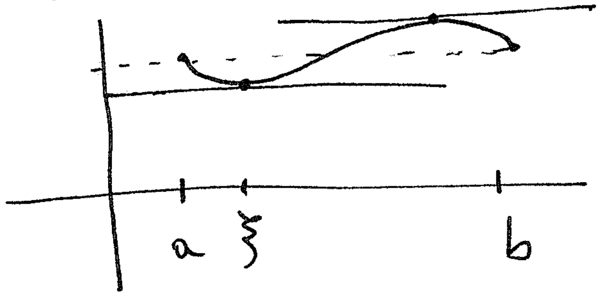
Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) oraz $f(a)=f(b)$, to istnieje $\xi\in(a,b)$ takie, że $f'(\xi)=0$.

Dowód: Z tw. Weierstrassa f przyjmuje na $[a,b]$ minimum i maksimum. Jeżeli którekolwiek z nich jest przyjmowane w $\xi\in(a,b)$, to z tw. Fermata $f'(\xi)=0$. Pozostaje przypadek, gdy i minimum, i maksimum są przyjmowane w końcach przedziału, czyli w a i b, ale wtedy

$$\min_{[a,b]} f = f(a) = f(b) = \max_{[a,b]} f \implies f \text{ jest stała na } [a,b]$$

i $f'(\xi)=0$ dla wszystkich $\xi\in(a,b)$.

Interpretacja geometryczna



Jeżeli $f(a)=f(b)$, to między a i b jest punkt, w którym styczna do wykresu jest pozioma.

Tw. Cauchy'ego

Niech funkcje f i $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe na $[a,b]$ i różniczkowalne na (a,b) i dodatkowo niech $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dowód: Rozważmy $H(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

Oczywiście H jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), mamy też $H(a) = 0 = H(b)$, więc z tw. Rolle'a istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) \qquad (\text{i } g'(\xi) \neq 0)$$

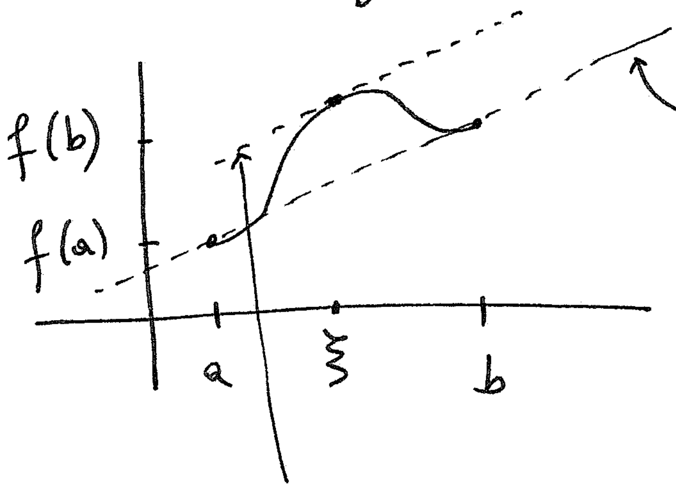
skąd od razu otrzymujemy tezę.

Biorąc w tw. Cauchy'ego $g(x) = x$ otrzymujemy

Twierdzenie Lagrange'a

Niech f będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$



współczynnik kierunkowy tej siecznej to $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

tw. Lagrange'a mówi, że istnieje punkt $\xi \in (a,b)$ w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Pochodna a monotoniczność

Twierdzenie Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$ i $f'(x_0)>0$, to istnieje $\delta>0$ takie, że dla $y\in(x_0,x_0+\delta)$ mamy $f(y)>f(x_0)$ a dla $y\in(x_0-\delta,x_0)$ mamy $f(y)<f(x_0)$.

Dowód

Z def. granicy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

Przyjmijmy $\varepsilon=f'(x_0)>0$ i dobierzmy doń $\delta>0$.

Wtedy dla $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$$-f'(x_0)<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)<f'(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$ czyli $f(x)-f(x_0)$ ma ten sam znak, co $x-x_0$.

$\square$.

Zadanie 1. Sprawdzić, że

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{1}{x}\quad \text{dla } x\neq 0,\quad f(0)=0$$

spełnia $f'(0)=1>0$, ale nie jest monotoniczna w żadnym otoczeniu 0.

~~Akt~~ Nim udowodnimy to twierdzenie, wyciągnijmy jeszcze jeden ważny wniosek.

Twierdzenie: Funkcja f ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) jest stała na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f' \equiv 0$ na (a,b).

Dowód: jeśli f jest stała, to $f' \equiv 0$. Jeśli $f' \equiv 0$, to f jest równocześnie nierosnąca i niemalejąca $\Rightarrow$ jest stała.

Dowód tw. o ścisłej monotoniczności

$\Rightarrow$ Załóżmy, że f jest rosnąca. Wiemy już, że $f' \geq 0$.
Weźmy teraz dowolne $x, y \in [a,b]$ takie, że $x < y$.
Gdyby $\forall_{\xi \in (x,y)}\ f'(\xi) = 0$, funkcja f byłaby na $[x,y]$ stała, więc $f(x) = f(y)$, co jest sprzeczne z tym, że f jest rosnąca. Stąd $\exists_{\xi \in (x,y)}$ tż $f'(\xi) > 0$.

$\Leftarrow$ Jeżeli $\forall_{\xi \in (a,b)}\ f'(\xi) > 0$, to f jest, jak już wiemy, niemalejąca. Załóżmy, że nie jest rosnąca, czyli że $\exists_{x,y \in [a,b]}$ tż. $x < y$, ale $f(x) = f(y)$.
Wtedy f jest stała na $[x,y] \Rightarrow$ ~~$\forall_{\xi\in}$~~ $f' \equiv 0$ na $[x,y)$, ↯.

Dla f malejących tak samo.

więc $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Stąd $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\square$.

<u>Ale</u>: Czy możemy to twierdzenie wzmocnić?

Czy

$$f \text{ jest rosnąca na } [a,b] \Leftrightarrow \forall_{x\in(a,b)} f'(x) > 0 \text{ ?}$$

Tylko w jedną stronę!

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = x + \sin x$

są rosnące na $\mathbb{R}$, choć ich pochodne mają miejsca zerowe.

<u>Twierdzenie</u> Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b). Wówczas f jest (ściśle) rosnąca (odp. malejąca) wtedy i tylko wtedy, gdy

(1) $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) we wszystkich $x \in (a,b)$

oraz

(2) $\forall_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x<y}} \exists_{\xi\in(x,y)} f'(\xi) > 0$
(odp $f'(\xi) < 0$)

czyli zbiór punktów, w których $f' > 0$ (<0), jest gęsty w (a,b).

Z tw. Fermata $g'(\xi)=0$, a więc $f'(\xi)=c$.

Przypadek $y<x$ rozpatrujemy analogicznie,
tylko szukamy maksimum na $[y,x]$, nie minimum.

Zadanie: Znaleźć $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ różniczkowalne i takie, że $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nie jest ciągła.

Kluczowy wniosek z tw. Lagrange'a

Twierdzenie: Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), to

a) f jest niemalejąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\geq 0$

b) f jest nierosnąca na $[a,b] \iff \forall_{x\in(a,b)}\ f'(x)\leq 0$.

Dowód (a); b) tak samo).

($\Longrightarrow$) Weźmy dowolne $x,y\in[a,b]$ tż $x<y$.

Z tw. Lagrange'a zastosowanego do $[x,y]$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\xi)\geq 0$$

dla pewnego $\xi\in(x,y)$

Stąd $f(y)\geq f(x)$.

($\Longleftarrow$) skoro f jest niemalejąca, to dla dowolnych $x,x_0\in[a,b]$ $f(x)-f(x_0)$ ma ten sam znak ($\substack{\geq 0\\ \leq 0}$) co $x-x_0$,

Zadanie 2

Znaleźć funkcję $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $f'(0) = 1$, ale f nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.

Wniosek : tw. Darboux

Niech $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna na (a,b). Wówczas $f': (a,b) \to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, tj. jeżeli dla pewnych $x, y \in (a,b)$ i $c \in \mathbb{R}$ mamy

$$f'(x) < c < f'(y),$$

to istnieje ξ leżące między x a y takie, że $f'(\xi) = c$.

Dowód: Rozważmy funkcję $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(t) = f(t) - ct$. Funkcja g jest różniczkowalna na (a,b) i $g'(t) = f'(t) - c$.

Załóżmy, że $x < y$;

$$g'(x) = f'(x) - c < 0$$

$$g'(y) = f'(y) - c > 0$$

$\Downarrow$

istnieje $\delta > 0$ tż. dla $t \in (x, x+\delta)$ $g(t) < g(x)$, a dla $t \in (y-\delta, y)$ $g(t) < g(y)$.

Stąd ani w x, ani w y funkcja g nie osiąga minimum na $[x,y]$. Z tw. Weierstrassa gdzieś jednak to minimum jest osiągane - w punkcie $\xi \in (x,y)$

Pochodna a warunek Lipschitza

1. Jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ spełnia na A warunek Lipschitza ze stałą L, to we wszystkich punktach $x \in A$ takich, że f jest różniczkowalna w x mamy $|f'(x)| \leq L$.

Dowód

$$|f'(x)| = \left| \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = \lim_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|$$

$$\leq \lim_{y \to x} \frac{L \cdot |y - x|}{y - x} = L$$

2. Czy jest odwrotnie: jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ i we wszystkich punktach różniczkowalności mamy $|f'| \leq L$, to f jest L-lipszycowska na A?

z tym zadaniem Państwa zostawię, zajmijmy się bliżej przypadkiem, gdy A jest przedziałem i f jest różniczkowalna wewnątrz A.

Do tych pytań jeszcze za jakiś czas wrócimy.

Twierdzenie: Niech $f: P \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na P i różniczkowalna w $\operatorname{int} P$, gdzie P jest przedziałem. Wówczas f spełnia na P warunek Lipschitza ze stałą $L \Leftrightarrow \sup\limits_{\operatorname{int} P} |f'| \leq L$.

Dowód

$\Rightarrow$ już mamy (punkt 1)

$\Leftarrow$

Niech $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$.

Z tw. Lagrange'a istnieje ξ między x a y takie, że $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq L \cdot |x-y|$. $\square$

Pytanie (odpowiedź za jakiś czas)

Czy istnieje funkcja jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, która na żadnym przedziale nie spełnia warunku Lipschitza?

2. Reguła de l'Hôpitala

Guillaume François Antoine de l'Hôpital
(de l'Hospital) 1661 – 1704.

Twierdzenie (reguła de l'Hôpitala, pochodzi od J. Bernoulliego)

Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne na (a,b), przy czym $\forall_{x\in(a,b)}\ g(x)\neq 0,\ g'(x)\neq 0$.

Załóżmy też, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, oraz że spełniony jest jeden z dwóch warunków:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$.

Wówczas istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest ona równa G.

Uwagi: 1. Dopuszczamy $a=-\infty$ i/lub $b=+\infty$

2. Twierdzenie jest sformułowane dla granic prawostronnych w a, ale jest prawdziwe (przy oczywistych zmianach w dowodzie) dla $\lim\limits_{x\to b^-}$ a także, przy ustalonym $c\in(a,b)$, dla $\lim\limits_{x\to c}$ (granica obustronna).

Modyfikacje dowodu są zupełnie oczywiste.

Dowód reguły de l'Hôpitala

Najprostszy przypadek: (a,b) jest przedziałem skończonym oraz zachodzi warunek a), tj
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Funkcje f i g, określone na (a,b), możemy przedłużyć do funkcji ciągłych na $[a,b)$ kładąc
$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ z $\not{\mathrm{f}}$
i analogicznie $g(a) = 0$.
Dla dowolnego $x \in (a,b)$ mamy teraz f i g ciągłe na $[a,x]$ i różniczkowalne na (a,x); z tw. Cauchy'ego o wart. średniej istnieje $\xi_x \in (a,x)$ takie, że
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Jeżeli teraz $x \to a^+$, to $\xi_x \to a^+$, bo $a < \xi_x < x$,
zatem $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = G$. $\square$

Ale w <u>ogólnej sytuacji</u> jest znacznie trudniej.
Dowód proszę porównać z dowodem Lematu Stolza.

<u>Krok 1</u> <u>Obserwacja</u>: skoro $g'(x) \neq 0$ na (a,b), to g jest na (a,b) różnowartościowa (gdyby dla pewnych $x,y \in (a,b)$ $g(x)=g(y)$, to między x a y byłoby ξ t. że $g'(\xi)=0$ – tw. Rolle'a), a więc ściśle monotoniczna. Możemy założyć, że g jest rosnąca ($\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{-f(x)}{-g(x)}$, gdyby g była malejąca, to zastąpilibyśmy f i g przez $-f$ i $-g$).

Mamy wówczas $g'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$.

Krok 2

Wybierzmy liczby $m, \tilde{m}, \tilde{M}, M$ takie, że

$$m < \tilde{m} < G < \tilde{M} < M$$

przy czym jeżeli $G = -\infty$, to nie będziemy mogli wybrać, ale też nie będziemy potrzebować m i $\tilde{m}$, i analogicznie, gdy $G = +\infty$, nie potrzebujemy M i $\tilde{M}$.

Skoro $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$, to istnieje $c \in (a,b)$ t.ż. $\forall_{x\in(a,c)}\ \tilde{m} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \tilde{M}$

Stąd dla $x \in (a,c)$

$$f'(x) - \tilde{m}g'(x) > 0 \quad \text{oraz} \quad \tilde{M}g'(x) - f'(x) > 0$$

a zatem funkcje $f - \tilde{m}g$ oraz $\tilde{M}g - f$ są na (a,c) rosnące.

Krok 3 Jeżeli zachodzi warunek a), to

(•) skoro $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, g rosnąca na (a,c), to $g > 0$ na (a,c)

(••) analogicznie $\lim\limits_{x\to a^+} (f - \tilde{m}g)(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a^+} (\tilde{M}g - f)(x) = 0$,

Skoro są rosnące, to $f - \tilde{m}g$ i $\tilde{M}g - f$ są dodatnie na (a,c).

$$\forall_{x\in(a,c)} \quad f(x) - \tilde{m}g(x) > 0,\ g(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m}$$

$$\tilde{M}g(x) - f(x) > 0,\ g(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \tilde{M}$$

Liczby $\tilde{M}$ i $\tilde{m}$ są dowolne, byleby spełniały $\tilde{m} < G < \tilde{M}$ (np $\tilde{m} = G - \varepsilon$, $\tilde{M} = G + \varepsilon$ dla dow. $\varepsilon > 0$), więc te nierówności pociągają za sobą $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

Krok 4 Przypadek b): $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$.

Wiemy, że g jest rosnąca, więc $\lim_{x\to a+} g(x) = -\infty$.

Wiemy też, że funkcje $f - \tilde{m}g$ oraz $\tilde{M}g - f$ są rosnące na (a,c), więc dla $x\in(a,c)$

$$f(x) - \tilde{m}g(x) < f(c) - \tilde{m}g(c)$$
$$\tilde{M}g(x) - f(x) < \tilde{M}g(c) - f(c)$$

Zmniejszając ew. c możemy zapewnić, by $g<0$ na (a,c). Stąd

$$\tilde{M}g(x) + f(c) - \tilde{M}g(c) < f(x) < \tilde{m}g(x) + f(c) - \tilde{m}g(c);$$

dzieląc przez $g(x)$ $\quad (g(x)<0)$

$$\tilde{M} + \underbrace{\frac{f(c)-\tilde{M}g(c)}{g(x)}}_{\downarrow x\to a^+ \; 0} > \frac{f(x)}{g(x)} > \tilde{m} + \underbrace{\frac{f(c)-\tilde{m}g(c)}{g(x)}}_{\downarrow x\to a^+ \; 0}$$

Istnieje zatem $d\in(a,c)$ takie, że

$$M > \frac{f(x)}{g(x)} > m \qquad (\text{bo } M>\tilde{M},\ m<\tilde{m})$$

i z dowolności M i m $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$.

(dowód autorstwa A. Birkholca).

Def. Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a funkcja $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$, to pochodną funkcji f' w x_0 nazywamy drugą pochodną funkcji f w x_0 i oznaczamy $f''(x_0)$, $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$, f_{xx} itd. Analogicznie, n-ta pochodna f w x_0 to pochodna $(n-1)$-pochodnej funkcji f w x_0, oznaczamy ją $f^{(n)}(x_0)$, $\frac{d^nf}{dx^n}(x_0)$, $\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$ itd.

Uwaga: Na to, by f była n-krotnie różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$ (a więc by istniała skończona $f^{(n)}(x_0)$), funkcja f i jej pierwsze $(n-1)$ pochodnych muszą być określone na pewnym otoczeniu x_0; $f, f', f'', \dots, f^{(n-2)}$ są wtedy ciągłe w pewnym otoczeniu x_0, a $f^{(n-1)}$ – w punkcie x_0. $f^{(n)}(x)$ nie musi być określona w żadnym punkcie poza x_0.

Umowa: $f^{(0)}=f$.

Lemat (o funkcjach szybko zbieżnych do zera)

Niech $r : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną w 0, $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas nast. warunki są równoważne

a) $r(x) = o(x^n)$

b) $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$.

Dowód:

a) $\Rightarrow$ b)

Wiemy, że $r, r', \dots, r^{(n-1)}$ są ciągłe w 0.

Stąd $r(0) = \lim\limits_{x \to 0} r(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} \cdot x^n = 0$.

$$r'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{r(x) - r(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{r(x) - 0}{x^n} \cdot x^{n-1} = 0.$$

lub 1, gdy $n = 1$

Załóżmy, że wiemy już, że

$r(0) = r'(0) = \dots = r^{(k)}(0)$ dla pewnego k, $1 \le k < n$.

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} \cdot x^{n-k-1} = \lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^{k+1}} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{r'(x)}{(k+1)x^k} = \dots = \lim_{x \to 0} \frac{r^{(k)}(x)}{(k+1)! \cdot x}$$

o ile ta ostatnia granica istnieje!

Mamy jednak

$$\lim_{x \to 0} \frac{r^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{r^{(k)}(x) - r^{(k)}(0)}{x} = r^{(k+1)}(0),$$

więc istnieje!

Stąd $r^{(k+1)}(0)=0$.
Ta (skończona) indukcja pokazuje b).

b) $\Rightarrow$ a)
Dla $k=0,1,\dots,n-1$ $r^{(k)}$ jest ciągłe w 0,
więc $\lim_{x\to 0} r^{(k)}(x) = r^{(k)}(0)=0$.
Stąd do $\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}$ możemy $(n-1)$-krotnie zastosować regułę de l'Hôpitala w wersji $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{H^{n-1}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{n!\cdot x} =$$

tu już nie możemy
kolejny raz użyć reguły
de l'H., bo nie wiemy, czy
$r^{(n-1)}$ jest różniczkowalna gdziekolwiek
poza x_0.

$$= \frac{1}{n!} r^{(n)}(0) = 0.$$

Proste zadanko: Dla ustalonych $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ znajdź wielomian $W(x)$ spełniający
$W(x_0)=\alpha_0$, $W'(x_0)=\alpha_1$, ..., $W^{(n)}(x_0)=\alpha_n$.

Zróbmy je najpierw dla $x_0 = 0$

Niech $W(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$

~~W(0)~~ $\alpha_0 = W(0) = A_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \alpha_0$

$$W'(x) = A_1 + 2A_2 x + \dots + nA_n x^{n-1}$$

$$\alpha_1 = W'(0) = A_1 \qquad \Rightarrow \quad A_1 = \alpha_1$$

$$W''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3 A_3 x + \dots + n(n-1) A_n x^{n-2}$$

$$W'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 A_3 + \dots + n(n-1)(n-2) A_n x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$W^{(k)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot A_k + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) A_{k+1} x + \dots$$
$$+ n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) A_n x^{n-k}$$

stąd $\alpha_k = W^{(k)}(0) = k!\, A_k \qquad A_k = \dfrac{W^{(k)}(0)}{k!}$

i $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha_k}{k!} x^k$

Ogólny przypadek: wystarczy $W(x)$ przesunąć:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} (x - x_0)^k$$

Wniosek z lematu

Twierdzenie Niech $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ będą n-krotnie różniczkowalne w $x_0\in(a,b)$.

Wówczas

$$f(x)-g(x)=o\left((x-x_0)^n\right) \iff \begin{cases} f(x_0)=g(x_0)\\ f'(x_0)=g'(x_0)\\ \vdots \\ f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0).\end{cases}$$

Dowód:

Stosujemy lemat do $r(t)=f(x_0+t)-g(x_0+t)$

$$f(x)-g(x)=o\left((x-x_0)^n\right) \iff r(t)=o(t^n) \overset{\text{Lemat}}{\iff}$$

bo r jest n-krotnie różn w 0

$$\iff r(0)=r'(0)=\ldots=r^{(n)}(0)=0$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$f(x_0)=g(x_0) \quad f'(x_0)=g'(x_0) \quad \ldots \quad f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0).$$

Stąd i z założenia od razu dostajemy

Twierdzenie (Peano o wzorze Taylora)

Jeżeli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna w $x_0\in(a,b)$, to

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$