

Analiza matematyczna I.

Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MliM UW, 2016/17

ostatnie poprawki: 19 marca 2018

Szanowni Państwo,

zgodnie z zapowiedzią, na każdym kolokwium w pierwszym semestrze co najmniej jedna trzecia zadań będzie pochodziła wprost z tego zestawu, bądź będzie niewielką modyfikacją poniższych zadań.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze.

Podkreślamy: *proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu*. Materiał jest obszerny i dla większości z Państwa trudniejszy, niż w szkole, szczególnie na samym początku studiów. Ponadto, w matematyce *jest rzeczą normalną, że człowiek pewnych rzeczy nie potrafi zrobić*. Skuteczna nauka wymaga czasu, regularnego treningu i cierpliwości, a także bieżącego kontaktu z materiałem z wykładu. Taka inwestycja przynosi praktycznie zawsze pozytywne skutki.

1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów. Indukcja.

1. Udowodnić, że dla wszystkich $x \geq 1000$ zachodzi nierówność

$$x^3 \geq 5x^2 + 14x + 17.$$

2. Udowodnić, że liczba $\sqrt{7 + \sqrt{2}}$ jest niewymierna.

3. Wykazać, że równanie $x/1 = (1 - x)/x$ na liczbę złotego podziału $x \in (0, 1)$ nie ma pierwiastków wymiernych.

4. Niech a i b będą liczbami dodatnimi takimi, że $a^2 + b^2 \leq 2$. Udowodnić, że $a + b \leq 2$.

5. Płaszczyznę parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ podzielić na podzbiory odpowiadające stałej liczbie pierwiastków równania

$$abx^2 + (a + b)x + 1 = 0.$$

6. Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9abc.$$

7. Wykazać, że liczba $\sqrt{7/13} + \sqrt{13/7}$ jest niewymierna.

8. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{\sqrt{5} + 3} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ jest wymierna.

Wskazówka. Zbadać sumę i iloczyn liczb $\sqrt{\sqrt{5} + 3} \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

9.

10. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbiór λA określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Oznaczmy $\sup A = M$ i $\inf A = m$. Wyznaczyć kresy zbioru λA .

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

12. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

13. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

14. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$3 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \geq 2n\sqrt{n} + 1,$$

przy czym dla $n > 1$ nierówność jest ostra.

15. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$5 \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \geq 2n^2\sqrt{n} + 3$$

16. Wykazać, że dla każdego n naturalnego liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.

17. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 ($= 3 \cdot 2^4$).

18. Udowodnić, że dla liczb całkowitych $0 \leq k < l \leq n/2$ mamy $\binom{n}{k} < \binom{n}{l}$.

19. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$4^{n-1} \binom{3n}{n} \sqrt{n} \geq 3^{3n-2}$$

20. Czy zbiór $A = \{2^n/3^k, \text{ gdzie } k, n \text{ naturalne i } k \geq n\}$ jest ograniczony z góry? A z dołu? Proszę uzasadnić obie odpowiedzi. Jeśli któraś z nich jest twierdząca, wyznaczyć odpowiedni kres zbioru A .

21. Dane są liczby $a_n \in [0, 1]$, gdzie $n = 1, 2, \dots$. Udowodnić, że zbiór

$$A = \left\{ \frac{a_n}{n} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

jest ograniczony i $\inf A = 0$.

22. Udowodnić, że $(n!)^2 \geq n^{n+1}$ dla $n \geq 7$.

23. Wyznaczyć kresy górne i dolne zbiorów

$$A = \left\{ \frac{11}{k} - \frac{3}{m} : k, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{2}{k} + \frac{3}{m} - \frac{4}{n} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

24. Udowodnić, że zbiór

$$\left\{ \frac{n^n}{(n!)^2} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

jest ograniczony. Wyznaczyć jego kresy.

25. Wyznaczyć kresy zbiorów

$$A = \{|x - 1| + |x + 1| : x \in \mathbb{R} \text{ oraz } |x| < 2\}, \quad B = \{|x - 1| - |x + 1| : x \in \mathbb{R}\}.$$

26. Znaleźć $\inf A$ i $\sup A$, gdzie

$$A = \{x + y + z : x, y, z > 0, xyz = 1\}.$$

27. Znaleźć

a) $\inf \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\},$

b) $\sup \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\},$

c) $\inf \left\{ \frac{n^{200} + 1.01^n}{n^{100} + 1.02^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

28. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdego $a \in A$ istnieje element $b \in A$ taki, że $b \leq a/2 + 1$. Wykazać, że $\inf A \leq 2$.

29. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru $\{(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \mid x, y > 0\}$.

30. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{n - k^2}{n^2 + k^3} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

31. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{n2^m}{m2^n} \mid n > m \geq 1 \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

32. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} : n, m \in \mathbb{N}, m > n \right\}.$$

33. Znaleźć kresy zbioru A , jego element największy lub wykazać, że takowy nie istnieje oraz element najmniejszy lub wykazać, że takowy nie istnieje, jeśli

$$A = \left\{ \frac{2013n + k}{n + 2013k} : n, k \in \mathbb{Z}, n, k \geq 10000 \right\}.$$

34. Zbiór niepusty $A \subset (0, \infty)$ ma tę własność, że jeśli $a \in A$, to $\frac{1}{a} \in A$. Wykazać, że jeśli A jest ograniczony z góry, to $\inf A \cdot \sup A = 1$.

35. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

36. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

37. Znaleźć wzór na

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

i udowodnić go.

38. Udowodnić, że jeśli $n \geq 4$ jest liczbą naturalną, to

$$\binom{2n}{n} \geq n \cdot 2^n.$$

39. Udowodnić, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2 \lfloor n/2 \rfloor} = 2^{n-1}.$$

40. Wykazać, że

$$0^2 \binom{n}{0} + 1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \cdots + n^2 \binom{n}{n} = n(1+n) \cdot 2^{n-2}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $k^2 = k(k-1) + k$ i obliczyć dwie sumy.

41. Załóżmy, że (s_k) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych, $s_1 \leq 1$, i dla każdego $k \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3 \sum_{j=1}^k s_j.$$

Wykazać, że $s_k < 7^k$ dla wszystkich k naturalnych.

Wskazówka. $2k < 1 + 2k \leq (1+2)^k$ na mocy nierówności Bernoulli'ego.

42. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić nierówność

$$(n+1)^{n+1} > (n+2)^n.$$

43. Znaleźć kres górny zbioru

$$\left\{ a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} \mid a + b + c = 1, a, b, c > 0 \right\}.$$

44. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach naturalnych (w zadaniu przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$). Wykazać, że

a) dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $b_n := \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}}$ jest malejący,

b) $\inf \left\{ \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} = 0,$

c) $\sup \left\{ \frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} = 2^{1-a_1}.$

Nowe zadania:

45. Wykazać, że $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$ nie jest liczbą wymierną.

46. Wyznaczyć

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n} \right],$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10} \right).$

47. Wyznaczyć kresy zbiorów

- $\left\{ \frac{x}{x^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \right\},$
- $\left\{ 2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R} \right\},$
- $\left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\},$
- $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$

48. Udowodnić, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

49. Udowodnić, że jeżeli a i b są liczbami dodatnimi, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

50. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ większego od 5 zachodzą nierówności

$$\left(\frac{n}{2} \right)^n \geq n! \geq \left(\frac{n}{3} \right)^n.$$

51. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right).$

52. O ciągu (a_n) wiemy, że istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = g.$$

Czy wynika stąd, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$?

53. Wykazać, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ funkcja $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dana wzorem

$$f_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

jest wielomianem stopnia $k+1$ zmiennej n .

54. Zbadać czy zbiór

$$A = \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2 + d^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2 + d^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2 + d^2)}} + \frac{d^2}{\sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)}} \right\},$$

gdzie a, b, c, d są dodatnie oraz $a + b + c + d = 1$, jest ograniczony.

55. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ zachodzi nierówność

$$n_1^3 + n_2^3 + \dots + n_k^3 \geq (n_1 + n_2 + \dots + n_k)^2.$$

56. Znaleźć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{m^4 + 2n^2}{2m^2 - m^2n + n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

57. Wyznaczyć kresy zbioru

$$X = \left\{ \frac{m^2n^3 + 3m^2n^2 + 2mn^3 + 6mn^2}{(m^2 + 2m)^2 + (n^3 + 3n^2)^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wskazówka. Można skorzystać z nierówności między średnimi, a w szczególności z tego, kiedy zachodzi w niej równość.

58. Udowodnić, że dla każdego $n, l \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}.$$

59. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

60. Niech

$$H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Udowodnić, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n-1} kH_k = \frac{n(n-1)}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right).$$

Wskazówka. Można przez indukcję ale może warto skorzystać z następującej obserwacji. Jeśli $a, b : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągami i zdefiniujemy $\Delta a(n) := a(n+1) - a(n)$, to $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta a(k) = a(n) - a(0)$ oraz $\Delta(ab)(n) = a(n+1)\Delta b(n) + b(n)\Delta a(n)$.

2 Ciągi i granice.

61. Czy któryś z poniższych ciągów jest monotoniczny? Monotoniczny dla dostatecznie dużych n ?

$$a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2, \quad b_n = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1}.$$

Odpowiedź oczywiście należy uzasadnić.

62. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}, \quad b_n = \frac{9 + 16 + \dots + (7n + 2)}{n^2}.$$

63. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{dla } n=1,2,\dots$$

Udowodnić, że $a_n = 2^{n-1} + 5^{n-1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

64. Dla jakich liczb rzeczywistych $p > 1$ ciąg $(\sqrt[n^p]{n^p + n + 1} - \sqrt[n^p]{n^p - n + 1})$ jest ograniczony?

65. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{3 + (-1)^n + 9\sqrt{n} - 7n^5 - 2[\sqrt[3]{n}]n}{(3n-1)(n-2)(2n-3)(n-4)(4n-5) + 2^{-n}},$$
$$b_n = -3n^3 + \sqrt{9n^6 + 7n^3 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 10n^2}.$$

66. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 4} + \dots + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) n.$$

67. Dla każdego z poniższych ciągów zbadaj, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to oblicz jej wartość.

$$a_n = \frac{(\sqrt{11n^2 + 3n + \sqrt{n^3}} - \sqrt{11n^2 + 1})^{15}}{(1,001 - \frac{1}{n})^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n^2} k^{1000} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^k},$$
$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}}, \quad d_n = \sqrt[2^n]{2^n - n}.$$

68. Dla każdego z poniższych ciągów zbadaj, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to oblicz jej wartość.

$$a_n = \sqrt[n]{3^n + n^{100} - (2,999)^n}, \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{n^5}{5^n} + \frac{1}{2^{nn(10^{10})}}},$$
$$c_n = \left(0,999 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}, \quad d_n = \left(1,00001 - \frac{1}{n}\right)^{n+7(-1)^n}.$$

69. Rozstrzygnij, czy ciąg zdefiniowany poniższym wzorem jest zbieżny:

$$a_n = \sum_{k=n+2}^{2n+7} \frac{1}{k}, \quad b_n = \sum_{n+1}^{n^2} \frac{1}{k}.$$

70. Załóżmy, że liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ mają tę własność, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje trójkąt o bokach a^n, b^n, c^n . Wykazać, że wśród liczb a, b, c przynajmniej dwie są sobie równe.

71. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{n^2}{7\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{3\sqrt{n}}{2^n}.$$

72. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\sqrt{2n+1}.$$

73. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n + \sqrt{n + 2012}} - \sqrt{n + \sqrt{n + 2010}} \right).$$

74. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + 2012}} - \sqrt{n + \sqrt{n + 2010}}}{\sqrt[3]{n^{3/2} + 2012} - \sqrt[3]{n^{3/2} + 2010}}.$$

75. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=k}^{2k-1} \frac{n}{2^n}.$$

Wykazać, że

$$s_k = \frac{(2k+2)2^k - 4k - 2}{2^{2k}} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu (s_k) .

76. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=0}^{k-1} n \left(\frac{4}{3} \right)^n.$$

Wykazać, że

$$s_k = 12 + (3k - 12) \left(\frac{4}{3} \right)^k \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu $c_k = s_k/2^{k/2}$.

77. Niech a_n będzie ciągiem zadany rekurencyjnie: a_1 jest pewną liczbą rzeczywistą, a ponadto

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że gdy $|a_1| \leq (1 + \sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest ograniczony, a gdy $|a_1| > (1 + \sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny (do $+\infty$.)

78. Udowodnić, że ciąg

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3 - \frac{2}{3}, \quad \dots, \quad a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

79. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ taki, że $a_1 = a_2 = 1$ oraz $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^n \right].$$

Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

80. Niech $(F_n)_{n \geq 0}$ będzie ciągiem spełniającym warunki $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$. Udowodnij, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$F_n^4 = 1 + F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}.$$

81. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

82. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^2 + 20n + 5)}{\ln(n^9 - 3n + 12)}.$$

83. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt[n]{\ln n}).$$

84. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(n^2 + 1) - 2n(\ln n) \sqrt[n]{\ln n}).$$

85. Niech b będzie liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś c - dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznacz, lub wykaż że nie istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot c}}{2 \cdot \frac{1}{n}}$$

86. Udowodnić, że jeżeli dla ciągu (a_n) liczb dodatnich istnieje skończona granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

87. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \right)$$

88. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}) \ln \frac{2n + 1}{n}.$$

89. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^{b_n},$$

gdzie $b_n = (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1})^{-2}$.

90. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony, a następnie znaleźć jego granicę.

91. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = f(f(x_n)) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Wykazać, że x_n jest monotoniczny i ograniczony i obliczyć jego granicę.

92. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy dodatnie i jest ograniczony. Wykazać, że jeśli ciąg (c_n) ma granicę równą 0, to ciąg dany wzorem

$$b_n := c_n \sqrt[n]{\ln(1 + a_1) \cdot \ln(1 + a_2) \cdot \dots \cdot \ln(1 + a_n)}$$

też ma granicę równą 0.

Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\ln(1 + x) \leq x$ dla $x > 0$.

93. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{n}}{2} \right)^{\frac{n}{\ln n}}.$$

94. Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) spełnia jednocześnie dwa warunki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0,$$

a ponadto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |a_{3m} - a_{3n}| \leq \varepsilon,$$

to (a_n) jest zbieżny. Podać przykłady świadczące o tym, że żaden z powyższych warunków z osobna nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności ciągu a_n .

95. Wykazać, że jeśli

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

jest zbiorem wyrazów zbieżnego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) , to $\sup A \in A$ lub $\inf A \in A$.

Podać przykład takiego ograniczonego ciągu rozbieżnego (b_n) , dla którego ani $\sup B$, ani $\inf B$ nie są elementami zbioru B wszystkich wyrazów ciągu (b_n) .

96. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n + 1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n + 2)}.$$

Wskazówka: przydatne mogą być (ale nie muszą) różne własności logarytmu naturalnego.

97. Niech $x > 0$. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ wzorem

$$\sqrt[n]{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1}.$$

(a) Wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(b) Zbadać monotoniczność ciągu a_n .

98. Załóżmy, że ciąg $(a_{n^2})_n$ jest zbieżny do granicy skończonej, ponadto wyrazy ciągu $(a_n)_n$ spełniają warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } \forall m > N \exists n > N \text{ takie, że } |a_m - a_{n^2}| < \varepsilon.$$

Czy wynika stąd zbieżność ciągu $(a_n)_n$?

99 (trudniejsze). Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą rzeczywiste i dodatnie. Przyjmijmy $x_{n+1} = x_1$. Proszę udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_{i+1}}.$$

Nowe zadania:

100. Niech ciąg (a_n) będzie zbieżny do a i niech ciąg (b_n) będzie określony wzorem

$$b_n = \frac{n^3 a_n + 2n^2 - n}{2n^3 a_n + 5n + 2}.$$

Wykazać, że:

a) jeśli $a \neq 0$, to ciąg (b_n) jest zbieżny,

b) jeśli $a = 0$, to ciąg (b_n) może być rozbieżny.

101. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3 - n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

102. Dla liczby naturalnej l oznaczmy przez $s(l)$ sumę cyfr jej rozwinięcia dziesiętne-
go. Niech ciąg (a_n) liczb naturalnych będzie określony rekurencyjnie: $a_1 = k$, $a_{n+1} =$
 $s(a_n)$. Wykazać, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

103. Zbadać zbieżność i, jeżeli istnieją, obliczyć granice ciągów

a) $a_n = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$, gdzie $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)$.

b) $b_n = n \log \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)$,

c) $c_n = n \left((n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}} \right)$.

104. Obliczyć

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n^5 + (n+1)^5 + (n+2)^5 + \cdots + (n+n)^5}$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right)$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} \right)$.

105. Dana jest liczba wymierna $a > 0$. Określamy ciąg liczb wymiernych a_1, a_2, \dots
rekurencyjnie: $a_1 = a$, zaś dla $n > 1$ określamy $a_n = \frac{q+n}{p+n}$, przy czym liczba $\frac{p}{q}$ jest
liczbą a_{n-1} zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego. Dowieść, że ciąg a_1, a_2, \dots jest
zbieżny.

106. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{7} + 2\sqrt{n^2 + \ln 3} - 2\sqrt{n^2 + \ln 2} \right)^n.$$

Wskazówka. Jeśli $na_n \rightarrow g$, to $(1 + a_n)^n \rightarrow \exp(g)$.

3 Szeregi liczbowe i okolice

Uwaga: wszędzie w tym podrozdziale symbol $[x]$ oznacza część całkowitą (tzn. *en-*
tier) liczby rzeczywistej x , inaczej *podłogę* x , a symbol $\lceil x \rceil$ – tzw. *sufit* liczby x , tzn.
 $\lceil x \rceil = [x]$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz $\lceil x \rceil = [x] + 1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

107. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

108. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\sqrt[n]{2})}$$

109. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

110. Znaleźć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

111. Znaleźć wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right)^p$$

jest zbieżny.

112. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szeregi:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

113. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n} (n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

114. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7 + 13) + 10 \sin(n)}{n \ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1) \ln(\ln(n + (-1)^n))}.$$

115. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lceil 1 + \sin^2 n^5 \rceil} \left(\frac{n^2 + 3n + 10}{n^2 + 5n + 17} \right)^{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}.$$

116. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n} + 7} - \cos \sqrt[3]{n^3 - 2\sqrt{n} + 3} \right).$$

117. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n \sqrt[n]{n}) \ln^2 n}.$$

118. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}.$$

119. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \rfloor} \frac{\ln n}{n}.$$

120. Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^k (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ln n}.$$

Czy ciąg $S_{(2k)^2}$ jest zbieżny? Czy ciąg S_k jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

121. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach zespolonych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją, o której wiadomo, że istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|\sigma(n) - n| \leq M$. Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

122. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt[3]{n^3 + 8n + 1} \right) (\ln(n+1) - \ln n).$$

123. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)}.$$

124. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

125. Dany jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Czy wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/\sqrt{n}$ jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

126. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n a_n$, gdzie $a_n > 0$ jest zbieżny. Czy jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

127. Zbadać zbieżność szeregów

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \\ \text{b)} \quad & \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots \end{aligned}$$

128. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg zamienimy na $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-5/4}$?

129. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3 - n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

130. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^{n(n+1)/2}}.$$

131. Udowodnić tożsamość

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = -1.$$

132. Udowodnić, że liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

(*) $\exp z = \exp w$ i dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ spełniona jest równość $\exp(\alpha \cdot z) = \exp(\alpha \cdot w)$.

133. Wykazać, że każda liczba zespolona $w \in \mathbb{C}$ należy do zbioru wartości funkcji $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

134. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$S_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{C}: \varepsilon y > |x|, |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}.$$

Niech $f(z) = \exp(1/z)$ dla $z \neq 0$. Wykazać, że $f: S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest surjekcją.

135. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach zespolonych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też jest zbieżny.

4 Granica i ciągłość funkcji

Uwaga: w rozwiązaniach zadań o granicach proszę posługiwać się wyłącznie faktami znanymi z wykładu.

136. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}.$$

137. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x \cdot \sin(\sin x)}.$$

138. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2}).$$

139. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\sqrt{x}}.$$

140. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{1/\pi}}{1 - x^{1/e}}.$$

141. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} \right)^{1/(x^2 - 1)}.$$

142. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2}.$$

143. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

144. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}.$$

Wskazówka: Można wykorzystać wzór $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots$, a także jedną z wersji lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1.

145. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

dla $m, n \in \mathbb{N}$.

146. Dla jakich parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \text{dla } |x| > 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases}$$

jest ciągła na \mathbb{R} ?

147. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami takimi, że $P(0) = Q(0) = 0$. Jakie możliwe wartości (włączając $+\infty$ i $-\infty$) może przyjąć wyrażenie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{Q(x)} ?$$

Scharakteryzować te pary (P, Q) , dla których powyższa granica istnieje i jest różna od 0 i $\pm\infty$.

148. Niech $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $|x| < 1$. Naszkicować wykres tej funkcji i scharakteryzować wszystkie wielomiany Q , dla których granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{f(x)}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą.

149. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która ma granicę tylko w punktach 0 i 1.

150. Wyznaczyć stałe rzeczywiste a, c tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(\operatorname{tg} x) / (1 + \exp(\operatorname{tg} x)) & \text{dla } |x| < \pi/2, \\ \exp(c \cdot x) - 2 & \text{dla } |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

była ciągła na prostej \mathbb{R} .

151. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

i niech $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbadać ciągłość funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$ na całej prostej rzeczywistej.

152. Wyznaczyć stałe dodatnie A, B, C , dla których istnieje funkcja ciągła $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A\sqrt{x} - B}{x^2 - 4} && \text{dla } x > 2, \\ f(x) &= \frac{\ln(Cx)}{x - 2} && \text{dla } 0 < x < 2. \end{aligned}$$

153. Dla jakich stałych rzeczywistych A funkcja

$$f(x) = [x] \cos(Ax), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , jest ciągła na \mathbb{R} ?

154. Zbadać, czy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x(\cos x - a)}{\sin x}, & x \neq 0, x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale $(-\pi, \pi)$.

155. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1/(2\sqrt{2}), 2\sqrt{2}]$ i spełnia warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f(1/(2\sqrt{2})) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

156. Funkcja f jest ciągła na $[0, 1]$ i spełnia zależność

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + 1/3) + f(x + 2/3)}{x} = 1.$$

Udowodnić, że istnieje punkt $x_0 \in [0, 1]$ taki, że $f(x_0) = 0$.

157. Bez pomocy kalkulatora wyznaczyć rzeczywisty pierwiastek wielomianu $x^3 + x^2 + 2x + 1$ z dokładnością co najmniej $\frac{1}{16}$.

158. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Określamy

$$g(x) = \sup_{t \in [a, x]} f(t).$$

Dowieść, że g jest ciągła na przedziale $[a, b]$.

159. Funkcja f jest ciągła na $(-1, 1]$. Dla $x \in (-1, 1]$ określamy

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n).$$

Udowodnić, że g jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0) = f(1)$.

160. Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

161. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\cos(|n! \pi x|)^{2k} \right) \right) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Nowe zadania:

162. Mówimy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α , gdy

$$\exists C > 0, \text{ takie że } \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Wykaż, że jeśli f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1$, to f jest stała.

Ciągłość jednostajna i wypukłość (nowe zadania)

163. Czy z warunków:

(a) $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, ciągła;

(b) dla dowolnego x zachodzi $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < M$;

wynika, że f jest jednostajnie ciągła na $[0, +\infty)$?

164. Zbadaj jednostajną ciągłość funkcji $f(x) = (e^x - 1) \sin \frac{1}{3^x - 1}$ na $(0, +\infty)$.

165. Mówimy, że funkcja $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ma asymptotę ukośną w $+\infty$, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\exists A \in \mathbb{R} \setminus 0, B \in \mathbb{R}, \text{ takie że } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - Ax - B = 0.$$

Wykaż, że jeśli funkcja ciągła określona na przedziale $[0, \infty)$ ma asymptotę ukośną w $+\infty$, to jest jednostajnie ciągła.

166. Z badać jednostajną ciągłość funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, danych wzorami:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^4}, \quad g(x) = \frac{x}{1 + x^5}.$$

167. Niech $f: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \frac{\sin^3 x}{6}}{x^5}.$$

Rozstrzygnij, czy f jest jednostajnie ciągła na $(0, \pi/4]$ i czy f jest jednostajnie ciągła na $[\pi/4, \pi/2)$.

168. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że funkcja $g(x) = (x^2)f(x)$ jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R} . Udowodnij, że f ma w nieskończoności(ach) granicę równą 0.

169. Czy funkcja $\sin(x^2)$ jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R} ?

170. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną.

(a) Udowodnij, że $f(x)^{f(x)}$ też jest jednostajnie ciągła.

(b) Zbadaj czy funkcja

$$g(x) = \left(\sqrt{x} \ln(x)\right)^{\sqrt{x} \ln(x)}$$

jest jednostajnie ciągła.

171. Niech $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ będzie funkcją wypukłą. Dla dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z wykaż poniższą nierówność

$$x\sqrt{1 + f\left(\frac{y-z}{x}\right)^2} + y\sqrt{1 + f\left(\frac{z-x}{y}\right)^2} + z\sqrt{1 + f\left(\frac{x-y}{z}\right)^2} \geq (x+y+z)\sqrt{1 + f(0)^2}.$$

172. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnij, że f osiąga swoje kresy na $[a, b]$.

173. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = e^{\frac{1}{\cos x}}$$

jest wypukła na $(0, \frac{\pi}{2})$, a następnie udowodnij nierówność

$$3(e^2 - e)x > \pi e^{\frac{1}{\cos x}}, \quad \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

174. Podaj przykłady par funkcji ściśle wypukłych określonych na $(0, +\infty)$, których złożenie

(i) jest funkcją ściśle wypukłą,

(ii) jest funkcją ściśle wklęsłą,

(iii) nie jest funkcją wypukłą ani wklęsłą.

175. Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0, x + y + z = 1\}$. Wykaż, że dla dowolnych $(x, y, z) \in A$ zachodzi nierówność

$$x \ln(\operatorname{arc\,tg} x) + y \ln(\operatorname{arc\,tg} y) + z \ln(\operatorname{arc\,tg} z) \leq \ln(\operatorname{arc\,tg} (x^2 + y^2 + z^2))$$

176. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$x\sqrt{y+z} + y\sqrt{x+z} + z\sqrt{x+y} \leq \sqrt{2(x+y+z)(xy+xz+yz)}.$$

177. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Wykaż, że ze wszystkich n -kątów wpisanych w dany okrąg największe pole ma n -kąt foremny.

5 Rachunek różniczkowy

178. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto $f(0) = a$. Wykazać, że $f(x) = a e^x$.

179. Wielomian $W(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ wielomian $\alpha W(x) + W'(x)$ ma co najmniej $n - 1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

180. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \exp(-1/|x|) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest w punkcie $x_0 = 0$ ciągła? różniczkowalna? Odpowiedzi proszę uzasadnić. Obliczyć kres górny i kres dolny f na zbiorze \mathbb{R} .

181. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \sqrt[5]{x^2 - 2x + 1}.$$

182. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{x-2} \sqrt[9]{x-7}.$$

183. Znaleźć kresy zbioru

$$A = \{ \sqrt[n^2]{n^2 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

184. Niech $f(x) = \sin \ln x$ dla $x > 0$. Proszę wyznaczyć:

- (a) wszystkie $a > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $(0, a]$;
- (b) wszystkie $b > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $[b, \infty)$,

(c) wszystkie $c > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $[c, \infty)$,

(d) wszystkie $d > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $(0, d]$.

185. Znaleźć ekstrema i zbadać wypukłość funkcji $f : (0, e^2) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2}.$$

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że funkcja $g(x) = (f(x))^n$ jest wypukła na przedziale $(0, e^2)$?
Odpowiedź uzasadnić.

186. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{\exp(x)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że f_n jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$? Odpowiedź uzasadnić.

187. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą, wypukłą i ściśle rosnącą oraz $f(a) = c$ i $f(b) = d$. Wykazać, że funkcja odwrotna $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ jest wklęsła.

188. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wiadomo, że istnieje punkt $x \in (a, b)$ taki, że dla każdego $y \in [a, b]$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$. Udowodnić, że f jest funkcją stałą.

189. Niech $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i wypukłymi. Wykazać, że funkcja $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

też jest wypukła.

190. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i ciągłą. Wykazać, że funkcja $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$m(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}$$

też jest wypukła.

191. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b , dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx) & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x \sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, \infty)$.

192. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

193. Wykazać, że równanie

$$(x - \sqrt{2}) \ln(x - \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) \ln(x + \sqrt{2}) = 2x$$

ma co najwyżej dwa rozwiązania w \mathbb{R} .

194. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r .

195. Spośród wszystkich deltoidów o obwodzie l wskazać ten o największym polu.

196. Wśród wszystkich trójkątów o obwodzie równym 3 znaleźć trójkąt o największym polu.

197. Obliczyć kres dolny na przedziale $(0, \infty)$ funkcji

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x.$$

198. Niech $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wykazać, że f osiąga swój kres dolny na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ w dokładnie jednym punkcie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz osiąga swój kres górny w dokładnie jednym punkcie v tego przedziału. Obliczyć $u + v$.

199. Dana jest funkcja $f(x) = e^{-|2x+1|}(x^2 + 2x + 3)$.

(a) wyznaczyć przedziały monotoniczności f ;

(b) wskazać przedziały, na których f jest wypukła;

(c) rozstrzygnąć, czy f jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R} .

200. Wykorzystując wzór Taylora dla $n = 3$, wyznaczyć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{e}$. Oszacować błąd przybliżenia.

201. Niech

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 + 3\sqrt[3]{x^8}}{x \cdot \sqrt[6]{x}} \quad \text{dla } x > 0.$$

Dowieść, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$, to $f(a) + f(b) + f(c) \geq 12$.

Wskazówka. Sprawdzić, na jakich przedziałach f jest wypukła.

202. Wykazać, że

$$1 + \exp \frac{a + b + c + d}{4} \leq \sqrt[4]{(1 + e^a) \cdot (1 + e^b) \cdot (1 + e^c) \cdot (1 + e^d)}$$

dla wszystkich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

203. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

nie przekracza $\frac{1}{720}$.

204. Udowodnić, że dla wszystkich $x > 0$ spełniona jest nierówność

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}.$$

205. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y zachodzi nierówność

$$x^x \cdot y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}.$$

206. Niech $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Załóżmy, że $h'(0)$ istnieje i jest liczbą większą od 1, a $h(0) \geq 0$. Wykazać, że $h(x) > x$ dla $x > 0$.

207. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = (2+x)\exp(1/x)$.

208. Wykazać, że dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność

$$\frac{2 \ln(\cos x)}{x^2} < \frac{x^2}{12} - 1.$$

209. Wykazać, że jeśli $e < y < x$, to

$$x^y < y^x.$$

210. Niech $f(x) = x^{-1}e^x$ dla $x > 0$ i niech

$$M(t) = \sup_{x \in [t, t+1]} f(x), \quad t > 0.$$

Wyznaczyć kres dolny funkcji $M: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

211. Obliczyć n -tą pochodną funkcji $x^n e^{-x}$ w zerze.

212. Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół $x = 2$ funkcji $f(x) = x^5 + x^4 + 2x + 1$.

213. Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia Taylora funkcji $\sin(\operatorname{tg} x)$ wokół $x = 0$.

214. Wyznaczyć trzeci wyraz rozwinięcia Taylora wokół $x = 0$ funkcji

$$f(x) = \frac{(1+x)^4}{(1+2x)^3(1-2x)^2}.$$

215. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) \cdot \exp(-1/x^2) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy $f''(0)$ istnieje? Czy $x_0 = 0$ jest punktem przegięcia f ? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

216. Posługując się tylko wzorem Taylora, obliczyć $\ln 3 - \ln 2$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

217. Wyznaczyć wszystkie pary liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których granica

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^5}$$

jest skończona.

218. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} (\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{n}).$$

219. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

220. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

221. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}.$$

222. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^n$$

223. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x + \varphi(x)}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x + \psi(x)}\right)} \right],$$

gdzie

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \psi(x) = \sqrt[x]{x} \quad \text{dla } x > 0.$$

Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $1/\sin(1/x)$.

224. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = g \in \mathbb{R},$$

to f jest jednostajnie ciągła na całej prostej \mathbb{R} .

Wskazówka. Czy f spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[a, \infty)$, gdy liczba a jest dostatecznie duża?

225. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x \operatorname{tg}(x \sin x)} - \frac{1}{x^2 \sin^2 x} \right).$$

226. Niech $f(x) = 2 - 2 \cos x - x \cdot \sin(\sin x)$ i niech $a_n = f(\frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie wykładniki $w > 0$, dla których szereg $\sum a_n^w$ jest zbieżny.

227. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x) - x}{\operatorname{tg}(2x) - 2 \ln(1+x) - x^2}.$$

228. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(1 - \cos(x)) - \operatorname{tg}^2(\sin(x))}{(\cos(x) - 1)^2}.$$

229. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(\ln(\arcsin(\operatorname{tg}(\exp(x) - 1) - \sin(x) + 1))))}{(\arcsin(x) - \sin(x))^{2/3}}.$$

230. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \sin(x)} - \cos(x) - \operatorname{tg}(x) - \frac{3}{2} \arcsin(\operatorname{tg}^2(x))}{\arcsin^3(\sin x)}.$$

Nowe zadania:

231. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \operatorname{tg}^2(x)}{1 - \cos(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x)}$$

232. Niech $f(x) = 1 - (x - 4)^2 + \frac{1}{2}(x - 4)^3 + o((x - 4)^3)$ przy $x \rightarrow 4$. Czy funkcja f ma w punkcie $x = 4$ lokalne ekstremum i jeśli tak to jakie?

233. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

234. Czy funkcja $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$ jest różniczkowalna w $x = 0$?

6 Zbieżność jednostajna i szeregi potęgowe

235. Wykazać, że jeśli a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a , zaś $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą i monotoniczną, to ciąg funkcji

$$f_n(x) := f(x + a_n)$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-M, M] \subset \mathbb{R}$.

236. Podać przykład ciągu funkcji $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie, ale szereg norm $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ jest rozbieżny.

237. Wykazać, że granica punktowa ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

238. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(n+x^2)\ln^2 n}.$$

239. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x+n}}$$

na przedziale $[0, +\infty)$.

240. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sqrt{\cos\left(\frac{2n+3}{5n^2-7}\right)} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^n.$$

241. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right).$$

Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X ? Odpowiedź proszę uzasadnić.

242. Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym, zbieżnym jednostajnie na \mathbb{R} do funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \exp(-(f_n(x))^2), & g(x) &= \exp(-(f(x))^2), \\ h_n(x) &= (f_n(x))^2, & h(x) &= (f(x))^2. \end{aligned}$$

Czy ciąg g_n zbiega jednostajnie na \mathbb{R} do funkcji g ? A czy ciąg h_n zbiega jednostajnie na \mathbb{R} do funkcji h ? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

243. Zbadać, czy suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \cos \frac{x}{n}$$

jest ciągła na zbiorze $(0, \pi)$.

244. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu

$$f_n(x) = n^2 \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{x}$$

na zbiorach $(0, +\infty)$ i $(0, a]$, gdzie $a > 0$.

245. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \exp\left(x + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)$$

na prostej rzeczywistej \mathbb{R} .

246. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

na odcinku $[0, 1]$.

247. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$. Definiujemy ciąg funkcyjny (f_n) przez wielokrotne składanie funkcji f :

$$f_n(x) := f^{\circ n}(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze $x \geq 0$.

248. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $[0, +\infty)$.

249. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $(0, +\infty)$.

250. Funkcja analityczna $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (szereg ma promień zbieżności $R > 0$) spełnia w przedziale $(-R, R)$ równanie

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

i ponadto $f(0) = \pi$. Wyznaczyć a_6 .

251. Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n + n^2 + n^3} x^{2n^3}$,
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+(-1)^n}$,
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (5n + (-1)^n)^n x^{2n}$,
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}$.

252. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n^2}$.

253. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + (x - n)^2)}$$

jest zbieżny jednostajnie na $(0, +\infty)$? Odpowiedź proszę uzasadnić.

254. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$.

255. Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję $f(x) = \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$.

256. Rozwinąć szereg Taylora–Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \arctg x^2.$$

Obliczyć promień zbieżności tego szeregu.

257. Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na przedziale $(0, 1)$, gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

258. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \quad x \in (-1, 1).$$

Wskazówka. $n/(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

259. Czy suma szeregu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$$

jest funkcją dobrze określoną i różniczkowalną na $(0, +\infty)$? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

260. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$ jest ciągła na $(-1, 1)$. Zbadać jej różniczkowalność na tym przedziale.

261. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{arc\,tg} nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

262. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{arc\,tg} nx - \frac{\pi}{2} \right), \quad x > 0.$$

263. Wykazać, że funkcja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}, \quad -3 < x < 3,$$

jest różniczkowalna i wyrazić jej pochodną jawnym, prostym wzorem.

264. Obliczyć sumę szeregu $1/2 - 1/5 + 1/8 - 1/11 + \dots$.

Wskazówka. Rozważyć funkcję $F(x) = x^2/2 - x^5/5 + \dots$.

265. Załóżmy, że $f \in C([0, \infty))$ nie jest funkcją stałą. Udowodnić, że rodzina $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, nie jest równociągła na $[0, 1]$.

266. Udowodnić, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{nx}}{1 + n^2 x^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

267. Dla $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ połóżmy $f_n(x) := x^2 + n^{-1} \sin nx$. Udowodnić, że ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie na całej prostej \mathbb{R} , ale nie jest rodziną równociągłą na \mathbb{R} , tzn. nie jest prawdą, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$.

268 (z gwiazdką, tylko dla zainteresowanych). Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i okresowa z okresem $T = 1$. Ponadto $f(0) = 0$ i $|f'| \leq 1$ na całej prostej \mathbb{R} . Dla $n \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$f_n(x) = \frac{f(2^n x)}{(\sqrt{2})^n} \quad \text{oraz} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

1. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1)$. Połóżmy $x = \frac{k}{2^n}$ oraz $y = x + \frac{\theta}{2^{n+1}}$. Wykazać, że istnieje stała C_1 , niezależna od k, n i θ , taka że

$$|F(x) - F(y)| \leq C_1 2^{-n/2}.$$

2. Wywnioskować z poprzedniego punktu, że F spełnia *warunek Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{2}$* , tzn. istnieje taka stała C_2 , że

$$|F(x) - F(y)| \leq C_2 |x - y|^{1/2} \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Zbadać różniczkowalność F .

269. Sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n + 3}$$

przedstawić wyraźnym, konkretnym wzorem jako funkcję zmiennej x . Na jakim przedziale słuszny jest otrzymany wzór?

Nowe zadania:

270. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wykaż, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu x_n zbieżnego do 0 ciąg funkcyjny $f_n(x) = f(x_n + x)$ jest jednostajnie zbieżny do f .

271. Zbadaj zbieżność jednostajną na \mathbb{R} szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3nx^4 - 4x^3 - 6nx^2 + 12x + 5n}.$$

7 Rachunek całkowy

272. Rozłożyć na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 6}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}.$$

273. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int (2x^3 + x) (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx.$$

274. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \exp(2x) \cos^3(x) dx.$$

275. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

276. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}{(1 + \sin^2 x) \cos^2 x} dx$$

277. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x^2 \sqrt{4 - x^2}$.

278. Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2) dt.$$

Obliczyć $f'(x)$.

279. Znaleźć kres dolny i górny funkcji

$$F(x) = \int_0^x \frac{5t + 3}{t^3 - 7t^2 + 16t - 12} dt$$

na przedziale $[-1, 1]$.

280. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

281. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}.$$

282. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{2n^2 + kn - k^2}}{n^2}.$$

283. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2} \cdot \dots \cdot (2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2} \cdot \dots \cdot n^{2n}}}.$$

284. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^5}{(n^2 + k^2)^3}.$$

285. Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty.$$

286. Wykazać, że

$$\int_0^2 e^{x^2-x} dx$$

należy do przedziału $[2e^{-1/4}, 2e^2]$.

287. Wykazać, że dla $n = 3, 4, 5, \dots$ prawdziwa jest równość

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx.$$

288. Niech f będzie funkcją dodatnią, ciągłą i rosnącą na przedziale $[a, b]$ i niech $a' = f(a), b' = f(b)$. Wykazać, że

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y) dy = bb' - aa',$$

gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f .

Wskazówka: Wykorzystać geometryczną interpretację całek.

289. Niech $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t) dt \cdot \int_0^x f(t) dt \geq \left(\int_0^x t f(t) dt \right)^2.$$

Wskazówka: zrózniczkować badane wyrażenie względem x .

290. Niech $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą okresową, o okresie $T = 1$ i całce oznaczonej $\int_0^1 f_0(x) dx = 1$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$f_n(x) = \frac{f_0(5^n x)}{2^n}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

oraz $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Wykazać, że szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na całej prostej \mathbb{R} i $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt$

291. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x},$$

gdzie F jest funkcją z poprzedniego zadania.

292. Funkcja f , ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$, ma na tym przedziale kres górny M . Dowieść, że ciąg

$$\left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}$$

ma granicę równą M .

293. Obliczyć całkę funkcji $f(x) = x \exp(-\sqrt{x})$ po maksymalnym przedziale półosi dodatniej, na którym ta funkcja jest wklęsła.

294. Wyznaczyć liczbę dodatnią x , dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sin(2\pi t / (t + 2)) dt$$

jest największa.

295. Wykazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$n \int_a^b f(x) \left(\int_a^x f(y) dy \right)^{n-1} dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^n$$

dla każdej liczby naturalnej n .

296. Punkt A znajduje się w środku układu współrzędnych w \mathbb{R}^2 . Prosta ℓ przechodzi przez A . W chwili $t_0 = 0$ punkt A zaczyna się poruszać po prostej ℓ ze stałą prędkością 1 m/s, a jednocześnie prosta ℓ zaczyna się obracać ze stałą prędkością kątową 1 radiana na sekundę. Obliczyć długość krzywej, jaką punkt A zakreśli, poruszając się od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1$ s.

297. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\pi \frac{(\sin x)^a}{x^b + (\pi - x)^c} dx,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

298. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^a \cdot |\sin x|^b}{\exp(x^2) - 1} dx,$$

gdzie (wariant 1) $a, b > 0$, (wariant 2, trudniejszy) $a, b \in \mathbb{R}$.

299. Niech $f \in C((0, 1])$ będzie taka, że $\int_0^1 |f(x)| dx$ jest zbieżna. Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie dowolną liczbą. Wykazać, że

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{1-\alpha}} \int_0^r |f(x)|^\alpha dx = 0.$$

Wskazówka: Zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$.

300. Niech $\alpha \in (0, 1)$. Obliczyć granicę

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r |\ln r|^\alpha} \int_0^r |\ln x|^\alpha \exp(-x^2) dx.$$

Poszczególne kroki w obliczeniach proszę starannie uzasadnić.

Wskazówka: Można zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$, a następnie spróbować wykorzystać twierdzenie o 3 funkcjach i monotoniczność logarytmu.

301. Niech $f \in C(\mathbb{R})$ i niech $M > 0$. Udowodnić, że ciąg funkcyjny

$$f_n(z) = \frac{n}{2} \int_{z-\frac{1}{n}}^{z+\frac{1}{n}} f(y) dy$$

jest zbieżny do f jednostajnie na $[-M, M]$.

302. Załóżmy, że $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $k = 1, 2, \dots$ jest

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \leq \frac{C}{k}.$$

Nowe zadania:

303. Niech $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1 + \operatorname{tg}(x)) - \frac{1}{2} \log(2)$. Niech

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x))^n dx$$

(a) Pokazać, że $I_{2k+1} = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$

(b) Pokazać, że $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{2k} = 0$.

(c) Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$.

304. Obliczyć granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi}{h^2} \int_{-h}^h e^x \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) dx$$

305. Udowodnij, że dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$