Twierdzenie (o istnieniu logarytmu)

Dla każdego $a>0, a\neq 1$ oraz $u\in\mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełniająca równanie $a^x = u$. Oznaczać ją będziemy $x=\log_a u$.

Dowód: Na początek zajmijmy się przypadkiem $a>1$. Rozważmy zbiory

$$A=\{x\in\mathbb{R}: a^x<u\} \quad i \quad B=\{x\in\mathbb{R}: a^x>u\}$$

Załóżmy, że równanie $a^x=u$ NIE MA rozwiązań rzeczywistych. Wówczas $(\cdot)$ $A\cup B=\mathbb{R}$ (bo jakaś nierówność między a^x a u musi zachodzić).

Dalej, zauważmy że

$(\cdot\cdot)$ zbiory A i B są niepuste:

niepustość A: jeżeli weźmiemy $x=-n$, gdzie $n\in\mathbb{N}$, $n\overset{(*)}{>}\dfrac{u^{-1}-1}{a-1}$, to

$$a^x=a^{-n}=\frac{1}{(1+(a-1))^n}\overset{\text{nier. Bernoulliego}}{\leq}\frac{1}{1+n(a-1)}\overset{\text{nier. }(*)}{<}\frac{1}{1+u^{-1}-1}=u$$

a więc takie x należy do A.

Podobnie biorąc $x=n$ dla $n\in\mathbb{N}$, $n>\dfrac{u-1}{a-1}$ dostajemy

$$a^x=a^n=(1+(a-1))^n\overset{\text{n.B.}}{\geq}1+n(a-1)>1+u-1=u$$

więc takie x należy do B.

(∵) każda liczba z A jest mniejsza od każdej liczby z B :

gdyby bowiem dla pewnych $x \in A$, $y \in B$ było $y \leq x$, to $u \underset{\text{bo } y\in B}{<} a^y \underset{\substack{y\leq x \\ + \text{ własności} \\ \text{potęgi}}}{\leq} a^x \underset{\text{bo } x\in A}{<} u$, czyli $u<u$ ↯

W szczególności zbiór A jest ogr. z góry (przez dowolny element B) i B jest ograniczony z dołu (przez dowolny element A)

(∷) $\inf B \in B$ lub $\sup A \in A$.

Załóżmy bowiem, że $\inf B \notin B$. Wówczas z (·) $\inf B \in A$. Twierdzę, że wówczas $\inf B = \sup A$. Gdyby bowiem $\inf B \neq \sup A$, to musiałoby być $\inf B < \sup A$, a wówczas znaleźlibyśmy $x \in A$, $x > \inf B$, ale wtedy dla odmiany istniałoby $y \in B$, $\underset{B}{y} < \underset{A}{x}$. To jest sprzeczne z (∵).

Zatem $A \ni \inf B = \sup A$, czyli $\sup A \in A$.

Albo więc $\underline{\inf B \in B}$, albo $\inf B \notin B$, ale wtedy $\underline{\sup A \in A}$.
Jedna z tych dwóch możliwości na pewno zachodzi.

(∴) teraz wykażemy, że (∴) nie jest możliwe:
dla każdego $\alpha \in A$ znajdziemy $\alpha' > \alpha$ tż. $\alpha' \in A$
i tak samo dla każdego $\beta \in B$ znajdziemy $\beta' < \beta$
tż. $\beta' \in B$. ↯ (a więc w A nie ma elementu największego,
a w B - najmniejszego).

Ustalmy $\underline{\alpha \in A,\ \beta \in B}$ i niech $\delta = \min\left(\frac{u}{a^\alpha} - 1, \frac{a^\beta}{u} - 1\right)$.
Z założenia wiemy, że $\delta > 0$; niech $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{a-1}{\delta}$.
Wówczas $a < 1 + n\delta \overset{n.B.}{\leq} (1+\delta)^n$, więc $a^{1/n} < 1+\delta$.
~~Stąd~~ Weźmy $\alpha' = \alpha + \frac{1}{n}$, wtedy

$$a^{\alpha'} = a^{\alpha + \frac{1}{n}} = a^\alpha \cdot a^{1/n} < a^\alpha(1+\delta) \leq a^\alpha\left(\frac{u}{a^\alpha} - 1 + 1\right) = u$$

skąd $\alpha' \in A$.

Tak samo dla $\beta' = \beta - \frac{1}{n}$ mamy

$$a^{\beta'} = a^{\beta - \frac{1}{n}} = \frac{a^\beta}{a^{1/n}} > \frac{a^\beta}{1+\delta} \geq \frac{a^\beta}{1 + \frac{a^\beta}{u} - 1} = u$$

a więc $\beta' \in B$.

To daje zapowiedzianą sprzeczność z (∴) i dowodzi, że równanie $a^x = u$ ma rozwiązanie (dla $a > 1$)

To, że jest to jedyne rozwiązanie wynika łatwo z własności potęgi: gdyby istniały dwa różne, $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, takie, że $a^x = u = a^y$
to z własności potęgi $x < y \Rightarrow a^x < a^y = a^x$ ↯.

Przypadek $a \in (0,1)$ sprowadzamy do poprzedniego. Zauważamy mianowicie, że równanie $a^x = u$ jest równoważne równaniu $(a^{-1})^x = u^{-1}$. ~~To równanie~~ O tym równaniu wiemy, że ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo to jest takie samo równanie jak $a^x = u$, tylko z a^{-1} w miejsce a i u^{-1} w miejsce u, i skoro $a \in (0,1)$, to $a^{-1} > 1$, zatem stosuje się rezultat poprzedniego punktu. $\square$

<u>Twierdzenie</u> (o własnościach logarytmu)

Dla dowolnych $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ oraz $t, u, v \in \mathbb{R}$ zachodzi

1) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
2) $\log_a u^t = t \log_a u$
3) $\log_a u = \log_a b \cdot \log_b u$
4) jeżeli $u < v$ i $a \gtrless 1$, to $\log_a u \lessgtr \log_a v$

<u>Dowód</u>: Wszystkie własności wynikają wprost z własności potęgi; wykażę 1) i 3), 2) i 4) zostawiając Państwu jako ćwiczenie.

Dowód 1)

Niech $x = \log_a uv$ $\quad y = \log_a u + \log_a v$

Wtedy $a^x = uv$

$$a^y = a^{\log_a u + \log_a v} = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = u \cdot v$$

więc x i y są rozwiązaniami równania $a^z = u$ (z niewiadomą z), a takie rozwiązanie jest dokładnie jedno. Stąd $x = y$.

Dowód 3)

Niech $x = \log_a u$, $y = \log_a b \cdot \log_b u$.

Jak poprzednio, $a^x = u$

$$a^y = a^{\log_a b \cdot \log_b u} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b u} = b^{\log_b u} = u,$$

więc $x = y$, tak samo jak w 1).

$\square$.