Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego o własności Darboux

Niech $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech ξ leży pomiędzy $f(a)$ a $f(b)$. Istnieje wówczas $c\in[a,b]$ takie, że $f(c)=\xi$.

Dowód:

Twierdzenie jest oczywiste, gdy $\xi=f(a)$ (wystarczy wziąć $c=a$) lub gdy $\xi=f(b)$ (bierzemy $c=b$). Możemy więc dalej założyć, że 1° $f(a)<\xi<f(b)$ albo 2° $f(b)<\xi<f(a)$. Udowodnię twierdzenie przy założeniu, że zachodzi przypadek 1°; przypadek 2° dowodzi się analogicznie.

Niech $A=\{x\in[a,b]: f(x)<\xi\}$.

(•) oczywiście $a\in A$, $b\notin A$.

(••) funkcja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\xi$ spełnia $g(a)<0$ i jest ciągła na $[a,b]$, więc z Twierdzonka istnieje $\delta_1>0$ takie, że $\forall y\in[a,b]$ $|a-y|<\delta_1 \Rightarrow g(y)<0$, a więc $g(y)<0$ dla wszystkich $y\in[a,a+\delta_1]$. Tym samym $f(y)<\xi$ dla $y\in[a,a+\delta_1]$, więc $[a,a+\delta_1]\subset A$.

(∴) Analogicznie $g(b)>0$, więc istnieje $\delta_2>0$ taka, że $g(y)>0$ dla $y\in[b-\delta_2,b]$. Tym samym $f(y)>\xi$ dla $y\in[b-\delta_2,b]$, więc $[b-\delta_2,b]\cap A=\emptyset$.

Niech $c=\sup A$ (zbiór A jest niepusty, bo $a\in A$ i ograniczony z góry przez b)

Z (⠄⠂) i (⠦⠂) wynika, że $a+\delta_1 \leq c \leq b-\delta_2$, więc $c \in (a,b)$. Stąd, dla dostatecznie dużych n, $(n>n_0)$

$$c-\frac{1}{n},\ c+\frac{1}{n} \in (a,b).$$

Oczywiście $c+\frac{1}{n} \notin A$, bo $c+\frac{1}{n} > \sup A$. Stąd

$$\forall_{n>n_0}\ f\left(c+\frac{1}{n}\right) \geq \xi \Rightarrow f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(c+\frac{1}{n}\right) \geq \xi \quad \text{z tw. o szacowaniu}$$

Nie mamy gwarancji, że $c-\frac{1}{n} \in A$, ale wiemy, że $c-\frac{1}{n} < \underset{c}{\underset{\parallel}{\sup A}}$, więc $\forall_{n>n_0} \exists_{\substack{x_n \in (c-\frac{1}{n}, c) \\ x_n \in A}}$ (w przeciwnym razie $c-\frac{1}{n}$ byłoby ogr. górnym zbioru A)

Oczywiście

$$c-\frac{1}{n} < x_n < c \Rightarrow x_n \to c,$$

$$x_n \in A \Leftrightarrow f(x_n) < \xi \Rightarrow f(c) \leq \xi.$$

Skoro $f(c) \geq \xi$ i $f(c) \leq \xi$, to $f(c) = \xi$.