GRANICE GÓRNE I DOLNE

Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych.

Zbiorem ω-granicznym ciągu (a_n), ozn. $\omega(a_n)$, nazywamy zbiór wszystkich granic tych podciągów ciągu (a_n), które w ogóle mają granicę.

$$\omega(a_n) = \{ g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \text{istnieje podciąg ciągu } (a_n) \text{ którego granicą jest } g \}.$$

Uwagi:

1. Zbiór $\omega(a_n)$ jest, dla dowolnego (a_n), niepusty (bo, z lematu Sierpińskiego, każdy ciąg ma podciąg monotoniczny, a ten zawsze ma granicę).
2. Ciąg (a_n) ma granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(a_n) = \{g\}$.

<u>Zadanie</u>: Wykaż, że ciąg (a_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(a_n)$ jest ograniczony.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli $\forall_m \; g_m \in \omega(a_n) \cap \mathbb{R}$ i $g_m \xrightarrow{m\to\infty} \underset{\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}}{\underset{\Uparrow}{g}}$, to również $g \in \omega(a_n)$.

~~Ustalm~~ ~~Ustalmy $\varepsilon>0$.~~

Dowód: Wiemy, że dla każdego $m\in\mathbb{N}$ istnieje podciąg ciągu (a_n) zbieżny do g_m $(\in\mathbb{R})$. Stąd też zbiór A_m:

$$A_m = \left\{n\in\mathbb{N} : |a_n - g_m| < \frac{1}{2^m}\right\}$$

jest nie tylko niepusty, ale nieskończony (zawiera indeksy wszystkich dost. dalekich wyrazów podciągu zbieżnego do g_m).

Wybierzmy teraz

$n_1 \in A_1$ jakkolwiek

$n_2 \in A_2$ takie, by $n_2 > n_1$ (da się, bo A_2 nieskończony)

$n_3 \in A_3$ takie, by $n_3 > n_2$ ....

Wtedy (a_{n_m}) jest podciągiem

$$\underset{\substack{\downarrow \\ g}}{g_m - \frac{1}{2^m}} < a_{n_m} < \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{g_m + \frac{1}{m}}$$

i (a_{n_m}) też dąży do g.

Ten argument działa również, gdy $g = \pm\infty$.

Kresy górne i dolne definiowaliśmy dla podzbiorów $\mathbb{R}$, nie $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Umówmy się, że jeżeli $A\subset\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ to

③

$$\sup A = \begin{cases} +\infty & \text{jeżeli } +\infty\in A \\ \sup A\cap\mathbb{R} & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$\inf A = \begin{cases} -\infty & \text{jeżeli } -\infty\in A \\ \inf A\cap\mathbb{R} & \text{w p.p.} \end{cases}$$

<u>Granicą górną</u> ciągu (a_n) nazywamy kres górny zbioru ω-granicznego ciągu (a_n), oznaczamy ją $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ (limes superior)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\omega(a_n)$$

Analogicznie definiujemy <u>granicę dolną</u> ciągu (a_n) (limes inferior, liminf):

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\omega(a_n).$$

<u>Przykład</u>

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1 \qquad \limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^n = 0 = \liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1$$

Jeżeli $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n .$$

Granice: górna i dolna zawsze istnieją!

Twierdzenie: Dla każdego ciągu (a_n)

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k : k>n\}$

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k : k>n\}$.

Dowód

Udowodnimy (1); dowód (2) jest analogiczny.

Niech (a_{n_k}) będzie (jakimkolwiek) podciągiem ciągu (a_n). Oznaczmy $A_n = \{a_k : k>n\}$; oczywiście dddk $a_{n_k} \in A_m$ (np dla $k>m$, bo wtedy $n_k \geq k > m$).

~~Jeżeli więc (a_{n_k}) ma granicę g,~~

Stąd dddk $a_{n_k} \leq \alpha_m = \sup A_m$

więc (z tw. o szacowaniu) jeżeli $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$, to $g \leq \alpha_m$. Ta nierówność zachodzi dla każdego $m\in\mathbb{N}$, skąd (znów z tw. o szacowaniu)

$$g \leq \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k>n\}.$$

Ta nierówność dla odmiany zachodzi dla każdego podciągu (a_{n_k}), który ma granicę, a więc

$$\forall g\in\omega(a_n) \quad g \leq \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k>n\}.$$

Stąd

$$\sup\omega(a_n) =: \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k>n\}$$

A w drugą stronę?

Przyjrzyjmy się zbiorom A_m.

Prościutkie zadanie: jeżeli w A_{m_0} nie ma elementu największego, to nie ma go też w żadnym A_m dla $m > m_0$.

~~Wniosek z zadania:~~

Albo (a) $\forall_m$ w A_m istnieje element największy albo (b) istnieje m_0 takie, że w A_{m_0} nie ma elementu największego.

(a). Wybieramy podciąg: $a_{n_1} = \max(A_1)$ (~~jakkolwiek~~)

$$a_{n_2} = \max A_{n_1}$$
$$\vdots$$
$$a_{n_{k+1}} = \max A_{n_k}$$

w ten sposób $n_{k+1} > n_k$ (bo $a_{n_{k+1}} \in A_{n_k}$),

$$\omega(a_n) \ni \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \max A_{n_{k-1}} = \lim_{m\to\infty} \max A_m =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sup A_m = \lim_{m\to\infty} \sup\{a_k : k > m\}.$$

Stąd $\lim_{m\to\infty} \sup\{a_k : k > m\} \leq \sup \omega(a_n) = \limsup a_n$.

(b) Skoro w A_{m_0} nie ma elementu największego, to ~~istnieje~~ między $\sup A_{m_0} - \frac{1}{k}$ a $\sup A_{m_0}$ jest nieskończ. wiele elementów ~~ciągu~~ zbioru A_{m_0}, a więc możemy sukcesywnie wybierać:

a_{n_1} takie, że $\sup A_{m_0} - 1 < a_{n_1} < \sup A_{m_0}$

a_{n_2} t.ż. $n_2 > n_1$ i $\sup A_{m_0} - \frac{1}{2} < a_{n_2} < \sup A_{m_0}$

$\vdots$

a_{n_k} t.ż. $n_k > n_{k-1}$ i $\sup A_{m_0} - \frac{1}{k} < a_{n_k} < \sup A_{m_0}$.

W ten sposób znajdujemy podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) dążący do $\sup A_{m_0}$

Uwaga: Powyższe rozumowanie jest poprawne gdy $\sup A_{m_0} < \infty$. Proszę (zadanie) samodzielnie je zmodyfikować w przypadku, gdy $\sup A_{m_0} = +\infty$. (tj znaleźć podciąg (a_{n_k}) dążący do $+\infty$).

W ten sposób wykazaliśmy, że $\sup A_{m_0} \in \omega(a_n)$.

Z drugiej strony $\forall_m \quad A_{m+1} \subset A_m$

$\sup A_{m+1} \leq \sup A_m$

więc ciąg $(\sup A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący.

Stąd $\lim\limits_{m\to\infty} \sup A_m \leq \sup A_{m_0} \in \omega(a_n)$

więc $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\{a_k : k > m\} \leq \sup A_{m_0} \leq \sup \omega(a_n) =$

$= \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

To ostatecznie dowodzi, że $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\{a_k : k>m\} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ $\square$

Twierdzenie o szacowaniu - wersja 2.0

(1) Jeżeli $\limsup_{n\to\infty} a_n < c$, to dddn $a_n < c$

(2) jeżeli dddn $a_n \leq c$, to $\limsup a_n \leq c$

(3) jeżeli $\liminf a_n > c$, to dddn $a_n > c$

(4) jeżeli dddn $a_n \geq c$, to $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq c$.

Dowód:

(1)

$\limsup_{n\to\infty} a_n < c \iff \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k>n\} < c \overset{\text{tw. o szac. 1.0}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ dddn $\sup\{a_k : k>n\} < c \Rightarrow \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \forall_{k>n} a_k < c$

cyli $\forall_{n>n_0+1} a_n < c$

$\iff$ dddn $a_n < c$

(2) jeżeli $\underset{n>n_0}{\text{dddn}}$ $a_n \leq c$, to dla każdego podciągu (a_{n_k}) ciągu (a_n) dddk (np dla $k>n_0$) $a_{n_k} \leq c$. W szczególności jeżeli $a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g \in$, to z tw. o szacowaniu $g \leq c$. Tym samym $\forall_{g\in\omega(a_n)} g \leq c \Rightarrow \sup \omega(a_n) \leq c$.

$$\sup \omega(a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

(3) ~~i (4)~~ tak samo jak (1), (4) tak samo jak (2) - proszę samodzielnie uzupełnić to rozumowanie.