Zadania domowe - seria 4

Uwaga: „zbadaj zbieżność" = „zbadaj, czy szereg jest zbieżny i czy jest zbieżny bezwzględnie/warunkowo".

Zadanie 1 (2p)

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

Wskazówka: Z wykładu wiemy, że $e^x \geq 1+x$ oraz $e^x-1-x \leq 2x^2$ (dla $|x|<1/2$), a więc $1+\frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$.

To pozwala oszacować $\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})$.

Zadanie 2 (1p)

Zbadaj zbieżność szeregu $\sum (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$

Zadanie 3 (2p)

Oblicz iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2^n}$. Uzasadnij, dlaczego ten iloczyn jest zbieżny i ~~po~~ oblicz jego sumę.

Zadanie 4 (2p)

Ciągi (a_n) i (b_n) mają tę własność, że $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ są zbieżne. Czy szereg $\sum(-1)^{[n\sqrt{n}]}a_n b_n$ jest zbieżny? zbieżny bezwzględnie?

termin: ~~20 grudnia 2013~~ / 8 I 2014