

Zadania domowe

seria 1

1. Udowodnij, że a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \binom{3n}{n} < 7^n$

$$b) \forall_{n \in \mathbb{N}} 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}$$

2. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe oraz że $\forall_{n \in \mathbb{N}} T(n) \Rightarrow T(n+1)$.
Czy wynika stąd, że

a) $T(15)$ jest fałszywe? b) $T(23)$ jest prawdziwe?

c) $T(8) \Rightarrow T(18)$? d) $T(18) \Rightarrow T(8)$?

(odpowiedzi trzeba poprawnie uzasadnić!)

3. Udowodnij, że $\sqrt{8} - \sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

4. Wyznacz $\sup A$ i $\inf A$, gdzie

$$A = \left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2 - 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

5. Wskaż liczbę wymierną C taką, że

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} 3 - \frac{C}{n} \leq \frac{3n^2 + n - 7}{n^2 + 2n - 1} \leq 3 + \frac{C}{n}$$

(i udowodnij, że necessary nierówności te zachodzą)

termin: 22 X 2013