Analiza matematyczna I.
Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MIiM UW, 2013/14

ostatnie poprawki: 6 listopada 2013

Szanowni Państwo,

zgodnie z zapowiedzią, na każdym kolokwium w pierwszym semestrze co najmniej 2 zadania zostaną wybrane z poniższej jawnej puli.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze.

Podkreślamy: *proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu.* Materiał jest obszerny i dla większości z Państwa trudniejszy, niż w szkole, szczególnie na samym początku studiów. Ponadto, w matematyce *jest rzeczą normalną, że człowiek pewnych rzeczy nie potrafi* zrobić. Skuteczna nauka wymaga czasu, regularnego treningu i cierpliwości, a także bieżącego kontaktu z materiałem z wykładu. Taka inwestycja przynosi praktycznie zawsze pozytywne skutki.

1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów. Indukcja.

1. Udowodnić, że dla wszystkich $x \geq 1000$ zachodzi nierówność

$$x^3 \geq 5x^2 + 14x + 17.$$

2. Udowodnić, że liczba $\sqrt{7 + \sqrt{2}}$ jest niewymierna.

3. Wykazać, że równanie $x/1 = (1 - x)/x$ na liczbę złotego podziału $x \in (0, 1)$ nie ma pierwiastków wymiernych.

4. Niech a i b będą liczbami dodatnimi takimi, że $a^2 + b^2 \leq 2$. Udowodnić, że $a + b \leq 2$.

5. Płaszczyznę parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ podzielić na podzbiory odpowiadające stałej liczbie pierwiastków równania

$$abx^2 + (a + b)x + 1 = 0.$$

6. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{\sqrt{5} + 3} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ jest wymierna.
Wskazówka. Zbadać sumę i iloczyn liczb $\sqrt{\sqrt{5} + 3} \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

7. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbiór λA określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a\colon\ a \in A\}\,.$$

Oznaczmy $\sup A = M$ i $\inf A = m$. Wyznaczyć kresy zbioru λA.

8. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

9. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}.$$

10. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

11. Wykazać, że dla każdego n naturalnego liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.

12. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 ($= 3 \cdot 2^4$).

13. Udowodnić, że dla liczb całkowitych $0 \leq k < l \leq n/2$ mamy $\binom{n}{k} < \binom{n}{l}$.

14. Czy zbiór $A = \{2^n/3^k,$ gdzie k, n naturalne i $k \geq n\}$ jest ograniczony z góry? A z dołu? Proszę uzasadnić obie odpowiedzi. Jeśli któraś z nich jest twierdząca, wyznaczyć odpowiedni kres zbioru A.

15. Dane są liczby $a_n \in [0,1]$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że zbiór

$$A = \left\{\frac{a_n}{n}\ :\ n = 1, 2, \ldots\right\}$$

jest ograniczony i $\inf A = 0$.

16. Udowodnić, że $(n!)^2 \geq n^{n+1}$ dla $n \geq 7$.

17. Udowodnić, że zbiór

$$\left\{\frac{n^n}{(n!)^2}\ :\ n = 1, 2, \ldots\right\}$$

jest ograniczony. Wyznaczyć jego kresy.

18. Wyznaczyć kresy zbiorów

$$A = \{|x-1| + |x+1|\ :\ x \in \mathbb{R} \text{ oraz } |x| < 2\}\,, \qquad B = \{|x-1| - |x+1|\ :\ x \in \mathbb{R}\}\,.$$

19. Znaleźć $\inf A$ i $\sup A$, gdzie

$$A = \{x + y + z : \ x, y, z > 0, \ xyz = 1\} .$$

20. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdego $a \in A$ istnieje element $b \in A$ taki, że $b \leq \frac{a}{2} + 1$. Wykazać, że $\inf A \leq 2$.

21. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru $\{(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \mid x, y > 0\}$.

22. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{n - k^2}{n^2 + k^3} : n, k \in \mathbb{N} \right\} .$$

23. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{n2^m}{m2^n} \mid n > m \geq 1 \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

24. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} \ : \ n, m \in \mathbb{N}, \ m > n \right\} .$$

25. Znaleźć kresy zbioru A, jego element największy lub wykazać, że takowy nie istnieje oraz element najmniejszy lub wykazać, że takowy nie istnieje, jeśli

$$A = \left\{ \frac{2013n + k}{n + 2013k} : \quad n, k \in \mathbb{Z}, \ n, k \geq 10000 \right\} .$$

26. Zbiór niepusty $A \subset (0, \infty)$ ma tę własność, że jeśli $a \in A$, to $\frac{1}{a} \in A$. Wykazać, że jeśli A jest ograniczony z góry, to $\inf A \cdot \sup A = 1$.

27. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 7, \qquad a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{dla n=1,2,...}$$

Udowodnić, że $a_n = 2^{n-1} + 5^{n-1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

28. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

29. Znaleźć wzór na

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

i udowodnić go.

30. Udowodnić, że jeśli $n \geq 4$ jest liczbą naturalną, to

$$\binom{2n}{n} \geq n \cdot 2^n .$$

31. Udowodnić, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2\,[n/2]} = 2^{n-1}.$$

32. Wykazać, że

$$0^2\binom{n}{0} + 1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(1+n) \cdot 2^{n-2}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $k^2 = k(k-1) + k$ i obliczyć dwie sumy.

33. Załóżmy, że (s_k) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych, $s_1 \leq 1$, i dla każdego $k \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3\sum_{j=1}^{k} s_j .$$

Wykazać, że $s_k < 7^k$ dla wszystkich k naturalnych.
Wskazówka. $2k < 1 + 2k \leq (1+2)^k$ na mocy nierówności Bernoulli'ego.

34. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić nierówność

$$(n+1)^{n+1} > (n+2)^n.$$

35. Znaleźć kres górny zbioru

$$\left\{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} \mid a+b+c = 1,\ a, b, c > 0\right\}.$$

36. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach naturalnych (w zadaniu przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$) . Wykazać, że

a) dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $b_n := \dfrac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}}$ jest malejący,

b)
$$\inf\left\{\frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\} = 0,$$

c)
$$\sup\left\{\frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\} = 2^{1-a_1}.$$

2 Ciągi i granice.

37. Czy któryś z poniższych ciągów jest monotoniczny? Monotoniczny dla dostatecznie dużych n?

$$a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2, \qquad b_n = n^2 - n\sqrt{n^2-1}.$$

Odpowiedź oczywiście należy uzasadnić.

38. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}, \qquad b_n = \frac{9+16+\cdots+(7n+2)}{n^2}.$$

39. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3+(-1)^n+9\sqrt{n}-7n^5-2[\sqrt[3]{n}]n}{(3n-1)(n-2)(2n-3)(n-4)(4n-5)+2^{-n}}, \\ b_n &= -3n^3+\sqrt{9n^6+7n^3+(-1)^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-10n^2}. \end{aligned}$$

40. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+4}+\ldots\frac{1}{n^2+2n}\right)n.$$

41. Dla każdego z poniższych ciągów zbadaj, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to oblicz jej wartość.

$$a_n = \frac{(\sqrt{11n^2+3n+\sqrt{n^3}}-\sqrt{11n^2+1})^{15}}{(1,001-\frac{1}{n})^n}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n^2} k^{1000}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^k},$$

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}, \qquad d_n = \sqrt[2^n]{2^n-n}.$$

42. Załóżmy, że liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ mają tę własność, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje trójkąt o bokach a^n, b^n, c^n. Wykazać, że wśród liczb a, b, c przynajmniej dwie są sobie równe.

43. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{n^2}{7^{\sqrt{n}}}, \qquad b_n = \frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n}.$$

44. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sqrt{2n+1}.$$

45. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+\sqrt{n+2012}}-\sqrt{n+\sqrt{n+2010}}\right).$$

46. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+2012}}-\sqrt{n+\sqrt{n+2010}}}{\sqrt[3]{n^{3/2}+2012}-\sqrt[3]{n^{3/2}+2010}}.$$

47. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k=\sum_{n=k}^{2k-1}\frac{n}{2^n}.$$

Wykazać, że

$$s_k=\frac{(2k+2)2^k-4k-2}{2^{2k}} \qquad \text{dla } k\in\mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu (s_k).

48. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k=\sum_{n=0}^{k-1} n\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Wykazać, że

$$s_k=12+(3k-12)\left(\frac{4}{3}\right)^k \qquad \text{dla } k\in\mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu $c_k=s_k/2^{k/2}$.

49. Niech a_n będzie ciągiem zadanym rekurencyjnie: a_1 jest pewną liczbą rzeczywistą, a ponadto

$$a_{n+1}=a_n^2-1 \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Udowodnić, że gdy $|a_1|\le(1+\sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest ograniczony, a gdy $|a_1|>(1+\sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny (do $+\infty$.)

50. Udowodnić, że ciąg

$$a_1=3,\quad a_2=3-\frac{2}{3},\quad \ldots, a_n=3-\frac{2}{a_{n-1}},\quad \ldots$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

51. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ taki, że $a_1 = a_2 = 1$ oraz $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\Big)^n\Big].$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

52. Niech $(F_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem spełniającym warunki $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Udowodnij, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$F_n^4 = 1 + F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2}.$$

53. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

54. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2 + 20n + 5)}{\ln(n^9 - 3n + 12)}.$$

55. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{\ln n}).$$

56. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(n\ln(n^2+1) - 2n(\ln n)\sqrt[n]{\ln n}\right).$$

57. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \ln\frac{2n+1}{2n}.$$

58. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{b_n},$$

gdzie $b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{-2}$.

59. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony, a następnie znaleźć jego granicę.

60. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = f(f(x_n)) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Wykazać, że x_n jest monotoniczny i ograniczony i obliczyć jego granicę.

61. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy dodatnie i jest ograniczony. Wykazać, że jeśli ciąg (c_n) ma granicę równą 0, to ciąg dany wzorem

$$b_n := c_n \sqrt[n]{\ln(1+a_1)\cdot\ln(1+a_2)\cdot\ldots\cdot\ln(1+a_n)}$$

też ma granicę równą 0.

Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\ln(1+x) \le x$ dla $x > 0$.

62. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{n}}{2}\right)^{\frac{n}{\ln n}}.$$

63. Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) spełnia jednocześnie dwa warunki:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0,$$

a ponadto

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m>N} \quad |a_{3m}-a_{3n}| \le \varepsilon,$$

to (a_n) jest zbieżny. Podać przykłady świadczące o tym, że żaden z powyższych warunków z osobna nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności ciągu a_n.

64. Wykazać, że jeśli

$$A = \{a_n \;:\; n\in\mathbb{N}\}$$

jest zbiorem wyrazów zbieżnego ciągu liczb rzeczywistych (a_n), to $\sup A \in A$ lub $\inf A \in A$.

Podać przykład takiego ograniczonego ciągu rozbieżnego (b_n), dla którego ani $\sup B$, ani $\inf B$ nie są elementami zbioru B wszystkich wyrazów ciągu (b_n).

65. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}.$$

Wskazówka: przydatne mogą być (ale nie muszą) różne własności logarytmu naturalnego.

66. Niech $x > 0$. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n\ge 1}$ wzorem

$$\sqrt[n]{x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1}.$$

(a) Wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Zbadać monotoniczność ciągu a_n.

67. Załóżmy, że ciąg $(a_{n^2})_n$ jest zbieżny do granicy skończonej, ponadto wyrazy ciągu $(a_n)_n$ spełniają warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} \text{ takie, że } \forall_{m>N}\ \exists_{n>N} \text{ takie, że } |a_m - a_{n^2}| < \varepsilon.$$

Czy wynika stąd zbieżność ciągu $(a_n)_n$?

68 (trudniejsze). Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą rzeczywiste i dodatnie. Przyjmijmy $x_{n+1} = x_1$. Proszę udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}}.$$

3 Szeregi liczbowe i okolice

Uwaga: wszędzie w tym podrozdziale symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (tzn. *entier*) liczby rzeczywistej x, inaczej *podłogę* x, a symbol $\lceil x \rceil$ – tzw. *sufit* liczby x, tzn. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

69. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

70. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\sqrt[n]{2})}$$

71. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

72. Znaleźć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \qquad \text{gdzie} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

73. Znaleźć wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^p$$

jest zbieżny.

74. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szeregi:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

75. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n}(n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

76. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7 + 13) + 10\sin(n)}{n\ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1)\ln(\ln(n + (-1)^n))} .$$

77. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lceil 1+\sin^2 n^5 \rceil} \left(\frac{n^2 + 3n + 10}{n^2 + 5n + 17}\right)^{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} .$$

78. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos\sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n} + 7} - \cos\sqrt[3]{n^3 - 2\sqrt{n} + 3}\right) .$$

79. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n\sqrt[n]{n})\ln^2 n} .$$

80. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}} .$$

81. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \right\rfloor} \frac{\ln n}{n} .$$

82. Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^{k} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{1}{\ln n} .$$

Czy ciąg $S_{(2k)^2}$ jest zbieżny? Czy ciąg S_k jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

83. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach zespolonych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją, o której wiadomo, że istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $|\sigma(n) - n| \leq M$. Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

84. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt[3]{n^3+8n+1} \right) (\ln(n+1) - \ln n) \, .$$

85. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)} \, .$$

86. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

87. Dany jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Czy wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/\sqrt{n}$ jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

88. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n a_n$, gdzie $a_n > 0$ jest zbieżny. Czy jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

89. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{b)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$$

90. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg szereg zamienimy na $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-5/4}$?

91. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3-n)3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

92. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + (-1)^{n(n+1)/2}}.$$

93. Udowodnić tożsamość

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -1.$$

94. Udowodnić, że liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

($*$) $\exp z = \exp w$ i dla pewnego $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ spełniona jest równość $\exp(\alpha\cdot z) = \exp(\alpha\cdot w)$.

95. Wykazać, że każda liczba zespolona $w \in \mathbb{C}$ należy do zbioru wartości funkcji $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

96. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$S_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon \varepsilon y > |x|,\ |z| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}\,.$$

Niech $f(z) = \exp(1/z)$ dla $z \neq 0$. Wykazać, że $f\colon S_\varepsilon \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest surjekcją.

97. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach zespolonych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też jest zbieżny.

4 Granica i ciągłość funkcji

Uwaga: w rozwiązaniach zadań o granicach proszę posługiwać się wyłącznie faktami znanymi z wykładu.

98. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}.$$

99. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x \cdot \sin(\sin x)}.$$

100. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}\right).$$

101. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\sqrt{x}}.$$

102. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{1/\pi}}{1-x^{1/e}}.$$

103. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right)^{1/(x^2-1)}.$$

104. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}.$$

105. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}.$$

106. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}.$$

Wskazówka: Można wykorzystać wzór $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \ldots$, a także jedną z wersji lematu o potęgach ciągów szybko zbieżnych do 1.

107. Obliczyć

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

dla $m, n \in \mathbb{N}$.

108. Dla jakich parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2} & \text{dla} \quad |x| > 1, \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad |x| \le 1 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$?

109. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami takimi, że $P(0) = Q(0) = 0$. Jakie możliwe wartości (włączając $+\infty$ i $-\infty$) może przyjąć wyrażenie

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)}\ ?$$

Scharakteryzować te pary (P, Q), dla których powyższa granica istnieje i jest różna od 0 i $\pm\infty$.

110. Niech $f(x) = \ln(1-x^2)$, $|x| < 1$. Naszkicować wykres tej funkcji i scharakteryzować wszystkie wielomiany Q, dla których granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{f(x)}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą.

111. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która ma granicę <u>tylko</u> w punktach 0 i 1.

112. Wyznaczyć stałe rzeczywiste a, c tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(\operatorname{tg} x)/\big(1+\exp(\operatorname{tg} x)\big) & \text{dla } |x| < \pi/2, \\ \exp(c \cdot x) - 2 & \text{dla } |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

była ciągła na prostej $\mathbb{R}$.

113. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

i niech $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbadać ciągłość funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$ na całej prostej rzeczywistej.

114. Wyznaczyć stałe dodatnie A, B, C, dla których istnieje funkcja ciągła $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A\sqrt{x}-B}{x^2-4} \qquad \text{dla } x > 2, \\ f(x) &= \frac{\ln(Cx)}{x-2} \qquad \text{dla } 0 < x < 2. \end{aligned}$$

115. Dla jakich stałych rzeczywistych A funkcja

$$f(x) = [x]\cos(Ax)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, jest ciągła na $\mathbb{R}$?

116. Zbadać, czy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x(\cos x - a)}{\sin x}, & x \neq 0,\ x \in (-\pi,\pi) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale $(-\pi, \pi)$.

117. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1/(2\sqrt{2}), 2\sqrt{2}]$ i spełnia warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f\big(1/(2\sqrt{2})\big) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

118. Funkcja f jest ciągła na $[0,1]$ i spełnia zależność

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1/3)+f(x+2/3)}{x}=1.$$

Udowodnić, że istnieje punkt $x_0\in[0,1]$ taki, że $f(x_0)=0$.

119. Bez pomocy kalkulatora wyznaczyć rzeczywisty pierwiastek wielomianu x^3+x^2+2x+1 z dokładnością co najmniej $\frac{1}{16}$.

120. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$. Określamy

$$g(x)=\sup_{t\in[a,x]} f(t)\,.$$

Dowieść, że g jest ciągła na przedziale $[a,b]$.

121. Funkcja f jest ciągła na $(-1,1]$. Dla $x\in(-1,1]$ określamy

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} f(x^n).$$

Udowodnić, że g jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0)=f(1)$.

122. Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right].$$

123. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\cos(|n!\pi x|)\right)^{2k}\right)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

5 Rachunek różniczkowy

124. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x)=f'(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$. Ponadto $f(0)=a$. Wykazać, że $f(x)=ae^x$.

125. Wielomian $W(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\alpha\in\mathbb{R}$ wielomian $\alpha W(x)+W'(x)$ ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

126. Czy funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}\exp(-1/|x|) & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

jest w punkcie $x_0=0$ ciągła? różniczkowalna? Odpowiedzi proszę uzasadnić. Obliczyć kres górny i kres dolny f na zbiorze $\mathbb{R}$.

127. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}\sqrt[5]{x^2-2x+1}\,.$$

128. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{x-2}\sqrt[9]{x-7}\,.$$

129. Znaleźć kresy zbioru

$$A = \{\ \sqrt[n^2]{n^2+2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

130. Niech $f(x) = \sin\ln x$ dla $x > 0$. Proszę wyznaczyć:

(a) wszystkie $a > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $(0, a]$;

(b) wszystkie $b > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $[b, \infty)$,

(c) wszystkie $c > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $[c, \infty)$,

(d) wszystkie $d > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $(0, d]$.

131. Znaleźć ekstrema i zbadać wypukłość funkcji $f : (0, e^2) \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2}\,.$$

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że funkcja $g(x) = (f(x))^n$ jest wypukła na przedziale $(0, e^2)$? Odpowiedź uzasadnić.

132. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{\exp(x)} : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że f_n jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$? Odpowiedź uzasadnić.

133. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, wypukła i ściśle rosnąca oraz $f(a) = c$ i $f(b) = d$. Wykazać, że funkcja odwrotna $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ jest wklęsła.

134. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wiadomo, że istnieje punkt $x \in (a, b)$ taki, że dla każdego $y \in [a, b]$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$. Udowodnić, że f jest funkcją stałą.

135. Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i wypukłymi. Wykazać, że funkcja $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

też jest wypukła.

136. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i ciągłą. Wykazać, że funkcja $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$m(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}$$

też jest wypukła.

137. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx) & \text{dla } x \geq 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x \sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, \infty)$.

138. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

139. Wykazać, że równanie

$$(x - \sqrt{2}) \ln(x - \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) \ln(x + \sqrt{2}) = 2x$$

ma co najwyżej dwa rozwiązania w $\mathbb{R}$.

140. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r.

141. Spośród wszystkich deltoidów o obwodzie l wskazać ten o największym polu.

142. Wśród wszystkich trójkątów o obwodzie równym 3 znaleźć trójkąt o największym polu.

143. Obliczyć kres dolny na przedziale $(0, \infty)$ funkcji

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x\,.$$

144. Niech $f(x) = \big(\operatorname{tg} x\big)^{\sin 2x}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wykazać, że f osiąga swój kres dolny na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ w dokładnie jednym punkcie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz osiąga swój kres górny w dokładnie jednym punkcie v tego przedziału. Obliczyć $u + v$.

145. Dana jest funkcja $f(x) = e^{-|2x+1|}(x^2 + 2x + 3)$.

(a) wyznaczyć przedziały monotoniczności f;

(b) wskazać przedziały, na których f jest wypukła;

(c) rozstrzygnąć, czy f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

146. Wykorzystując wzór Taylora dla $n = 3$, wyznaczyć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{e}$. Oszacować błąd przybliżenia.

147. Niech
$$f(x)=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5+3\sqrt[3]{x^8}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}\qquad \text{dla } x>0.$$
Dowieść, że jeśli $a,b,c>0$ i $a+b+c=3$, to $f(a)+f(b)+f(c)\geq 12$.
Wskazówka. Sprawdzić, na jakich przedziałach f jest wypukła.

148. Wykazać, że
$$1+\exp\frac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt[4]{\left(1+e^a\right)\cdot\left(1+e^b\right)\cdot\left(1+e^c\right)\cdot\left(1+e^d\right)}$$
dla wszystkich $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

149. Wykazać, że dla $|x|<1$ błąd przybliżenia
$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$
nie przekracza $\frac{1}{720}$.

150. Udowodnić, że dla wszystkich $x>0$ spełniona jest nierówność
$$\ln(1+x)>\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}.$$

151. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y zachodzi nierówność
$$x^x\cdot y^y\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}.$$

152. Niech $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Załóżmy, że $h'(0)$ istnieje i jest liczbą większą od 1, a $h(0)\geq 0$. Wykazać, że $h(x)>x$ dla $x>0$.

153. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x)=(2+x)\exp(1/x)$.

154. Wykazać, że dla $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność
$$\frac{2\ln(\cos x)}{x^2}<\frac{x^2}{12}-1\,.$$

155. Wykazać, że jeśli $e<y<x$, to
$$x^y<y^x.$$

156. Niech $f(x)=x^{-1}e^x$ dla $x>0$ i niech
$$M(t)=\sup_{x\in[t,t+1]}f(x),\qquad t>0.$$
Wyznaczyć kres dolny funkcji $M\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

157. Obliczyć n-tą pochodną funkcji $x^n e^{-x}$ w zerze.

158. Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół $x = 2$ funkcji $f(x) = x^5 + x^4 + 2x + 1$.

159. Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia Taylora funkcji $\sin(\operatorname{tg} x)$ wokół $x = 0$.

160. Wyznaczyć trzeci wyraz rozwinięcia Taylora wokół $x = 0$ funkcji

$$f(x) = \frac{(1+x)^4}{(1+2x)^3(1-2x)^2}.$$

161. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x)\cdot\exp(-1/x^2) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy $f''(0)$ istnieje? Czy $x_0 = 0$ jest punktem przegięcia f? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

162. Posługując się tylko wzorem Taylora, obliczyć $\ln 3 - \ln 2$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

163. Wyznaczyć wszystkie pary liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^5}$$

jest skończona.

164. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\big(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{n}\big).$$

165. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

166. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

167. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}.$$

168. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

169. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{x+\varphi(x)}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{x+\psi(x)}\right)}\right],$$

gdzie

$$\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\quad \psi(x)=\sqrt[x]{x}\qquad \text{dla } x>0.$$

Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $1/\sin(1/x)$.

170. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=g\in\mathbb{R},$$

to f jest jednostajnie ciągła na całej prostej $\mathbb{R}$.

Wskazówka. Czy f spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[a,\infty)$, gdy liczba a jest dostatecznie duża?

171. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x\,\mathrm{tg}(x\sin x)}-\frac{1}{x^2\sin^2 x}\right).$$

172. Niech $f(x)=2-2\cos x-x\cdot\sin(\sin x)$ i niech $a_n=f(\frac{1}{n})$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie wykładniki $w>0$, dla których szereg $\sum a_n^w$ jest zbieżny.

173. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)-x}{\mathrm{tg}(2x)-2\ln(1+x)-x^2}.$$

174. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(1-\cos(x))-\mathrm{tg}^2(\sin(x))}{(\cos(x)-1)^2}.$$

175. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(\sin(\ln(\mathrm{arc\,tg}\,(\exp(x)-1)-\sin(x)+1)))}{(\arcsin(x)-\sin(x))^{2/3}}.$$

176. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\sin(x)}-\cos(x)-\mathrm{tg}(x)-\frac{3}{2}\mathrm{arc\,tg}^2(x)}{\mathrm{arc\,tg}^3(\sin x)}.$$

6 Zbieżność jednostajna i szeregi potęgowe

177. Wykazać, że jeśli a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a, zaś $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą i monotoniczną, to ciąg funkcji

$$f_n(x) := f(x + a_n)$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-M, M] \subset \mathbb{R}$.

178. Podać przykład ciągu funkcji $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie, ale szereg norm $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ jest rozbieżny.

179. Wykazać, że granica punktowa ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

180. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(n + x^2) \ln^2 n}.$$

181. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x + n}}$$

na przedziale $[0, +\infty)$.

182. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tfrac{n}{n^2+1}\right) \sqrt{\cos\left(\tfrac{2n+3}{5n^2-7}\right)} \left(\tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^n .$$

183. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin\left(\frac{x}{1 + n^2 x^2}\right).$$

Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X? Odpowiedź proszę uzasadnić.

184. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym, zbieżnym jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$g_n(x) = \exp(-(f_n(x))^2)\,, \qquad g(x) = \exp(-(f(x))^2)\,,$$
$$h_n(x) = (f_n(x))^2\,, \qquad h(x) = (f(x))^2\,.$$

Czy ciag g_n zbiega jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji g? A czy ciag h_n zbiega jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji h? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

185. Zbadać, czy suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \cos\frac{x}{n}$$

jest ciągła na zbiorze $(0, \pi)$.

186. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu

$$f_n(x) = n^2 \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{x}$$

na zbiorach $(0, +\infty)$ i $(0, a]$, gdzie $a > 0$.

187. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \exp\left(x + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)$$

na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

188. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

na odcinku $[0, 1]$.

189. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$. Definiujemy ciąg funkcyjny (f_n) przez wielokrotne składanie funkcji f:

$$f_n(x) := f^{\circ n}(x) = f \circ f \circ \ldots \circ f(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze $x \geq 0$.

190. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $[0, +\infty)$.

191. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $(0, +\infty)$.

192. Funkcja analityczna $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (szereg ma promień zbieżności $R > 0$) spełnia w przedziale $(-R, R)$ równanie

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

i ponadto $f(0) = \pi$. Wyznaczyć a_6.

193. Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n + n^2 + n^3} x^{2n^3},$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+(-1)^n},$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (5n + (-1)^n)^n x^{2n},$$

$$\text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}.$$

194. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n^2}$.

195. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + (x - n)^2)}$$

jest zbieżny jednostajnie na $(0, +\infty)$? Odpowiedź proszę uzasadnić.

196. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$.

197. Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję $f(x) = \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$.

198. Rozwinąć szereg Taylora–Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{arc\,tg} x^2.$$

Obliczyć promień zbieżności tego szeregu.

199. Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na przedziale $(0, 1)$, gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

200. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \qquad x \in (-1,1)$$

spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \qquad x \in (-1,1)\,.$$

Wskazówka. $n/(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

201. Czy suma szeregu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

jest funkcją dobrze określoną i różniczkowalną na $(0,+\infty)$? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

202. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$ jest ciągła na $(-1,1)$. Zbadać jej różniczkowalność na tym przedziale.

203. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{arc\,tg} nx, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

204. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{arc\,tg} nx - \frac{\pi}{2} \right), \qquad x > 0.$$

205. Wykazać, że funkcja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}\,, \qquad -3 < x < 3,$$

jest różniczkowalna i wyrazić jej pochodną jawnym, prostym wzorem.

206. Obliczyć sumę szeregu $1/2 - 1/5 + 1/8 - 1/11 + \cdots$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję $F(x) = x^2/2 - x^5/5 + \cdots$.

207. Załóżmy, że $f \in C([0,\infty))$ nie jest funkcją stałą. Udowodnić, że rodzina $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, nie jest równociągła na $[0,1]$.

208. Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{n}x}{1+n^2x^2}=\frac{\pi^3}{12}\,.$$

209. Dla $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$ położmy $f_n(x):=x^2+n^{-1}\sin nx$. Udowodnić, że ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie na całej prostej $\mathbb{R}$, ale nie jest rodziną równociągłą na $\mathbb{R}$, tzn. nie jest prawdą, że dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ takie, że nierówność $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ i wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta$.

210 (z gwiazdką, tylko dla zainteresowanych). Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest klasy C^1 i okresowa z okresem $T=1$. Ponadto $f(0)=0$ i $|f'|\le 1$ na całej prostej $\mathbb{R}$. Dla $n\in\mathbb{N}$ kładziemy

$$f_n(x)=\frac{f(2^nx)}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\qquad\text{oraz}\qquad F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\,.$$

1. Niech $k,n\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$. Połóżmy $x=\frac{k}{2^n}$ oraz $y=x+\frac{\theta}{2^{n+1}}$. Wykazać, że istnieje stała C_1, niezależna od k,n i θ, taka że
$$|F(x)-F(y)|\le C_1 2^{-n/2}\,.$$
2. Wywnioskować z poprzedniego punktu, że F spełnia *warunek Höldera z wykładnikiem* $\frac{1}{2}$, tzn. istnieje taka stała C_2, że
$$|F(x)-F(y)|\le C_2|x-y|^{1/2}\qquad\text{dla wszystkich } x,y\in\mathbb{R}.$$
3. Zbadać różniczkowalność F.

211. Sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4n+3}$$

przedstawić wyraźnym, konkretnym wzorem jako funkcję zmiennej x. Na jakim przedziale słuszny jest otrzymany wzór?

7 Rachunek całkowy

212. Rozłożyć na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2-2x+6}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}.$$

213. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int(2x^3+x)\left(\operatorname{arc\,tg}x\right)^2\,dx.$$

214. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \exp(2x)\cos^3(x)\,dx.$$

215. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\,dx$$

216. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}\, x}{(1+\sin^2 x)\cos^2 x}\,dx$$

217. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x^2\sqrt{4-x^2}$.

218. Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2)\,dt.$$

Obliczyć $f'(x)$.

219. Znaleźć kres dolny i górny funkcji

$$F(x) = \int_0^x \frac{5t+3}{t^3-7t^2+16t-12}\,dt$$

na przedziale $[-1,1]$.

220. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x}\,dx}.$$

221. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}.$$

222. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2n^2+kn-k^2}}{n^2}.$$

223. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2}\cdot\ldots\cdot(2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2}\cdot\ldots\cdot n^{2n}}}.$$

224. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^5}{(n^2+k^2)^3}\,.$$

225. Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0,1]$, ale

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty.$$

226. Wykazać, że

$$\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$$

należy do przedziału $[2e^{-1/4}, 2e^2]$.

227. Wykazać, że dla $n = 3, 4, 5, \ldots$ prawdziwa jest równość

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2} x\,dx.$$

228. Niech f będzie funkcją dodatnią, ciągłą i rosnącą na przedziale $[a,b]$ i niech $a' = f(a), b' = f(b)$. Wykazać, że

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy = bb' - aa',$$

gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f.
Wskazówka: Wykorzystać geometryczną interpretację całek.

229. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t)\,dt \cdot \int_0^x f(t)\,dt \geq \left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2.$$

Wskazówka: zróżniczkować badane wyrażenie względem x.

230. Niech $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą okresową, o okresie $T = 1$ i całce oznaczonej $\int_0^1 f_0(x)\,dx = 1$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$f_n(x) = \frac{f_0(5^n x)}{2^n}\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$\text{oraz} \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Wykazać, że szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na całej prostej $\mathbb{R}$ i $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt$

231. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x}\,,$$

gdzie F jest funkcją z poprzedniego zadania.

232. Funkcja f, ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$, ma na tym przedziale kres górny M. Dowieść, że ciąg

$$\left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{1/n}$$

ma granicę równą M.

233. Obliczyć całkę funkcji $f(x) = x\exp(-\sqrt{x})$ po maksymalnym przedziale półosi dodatniej, na którym ta funkcja jest wklęsła.

234. Wyznaczyć liczbę dodatnią x, dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sin\left(2\pi t/(t+2)\right)\,dt$$

jest największa.

235. Wykazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

$$n\int_a^b f(x)\left(\int_a^x f(y)dy\right)^{n-1} dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^n$$

dla każdej liczby naturalnej n.

236. Punkt A znajduje się w środku układu współrzędnych w $\mathbb{R}^2$. Prosta ℓ przechodzi przez A. W chwili $t_0 = 0$ punkt A zaczyna się poruszać po prostej ℓ ze stałą prędkością 1 m/s, a jednocześnie prosta ℓ zaczyna się obracać ze stałą prędkością kątową 1 radiana na sekundę. Obliczyć długość krzywej, jaką punkt A zakreśli, poruszając się od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1$ s.

237. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\pi \frac{\big(\sin x\big)^a}{x^b + \big(\pi - x\big)^c}\,dx\,,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

238. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^a\cdot|\sin x|^b}{\exp(x^2)-1}\,dx\,,$$

gdzie (wariant 1) $a, b > 0$, (wariant 2, trudniejszy) $a, b \in \mathbb{R}$.

239. Niech $f \in C((0,1])$ będzie taka, że $\int_0^1 |f(x)|\, dx$ jest zbieżna. Niech $\alpha \in (0,1)$ będzie dowolną liczbą. Wykazać, że

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^{1-\alpha}} \int_0^r |f(x)|^\alpha \, dx = 0\,.$$

Wskazówka: Zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$.

240. Niech $\alpha \in (0,1)$. Obliczyć granicę

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r|\ln r|^\alpha} \int_0^r |\ln x|^\alpha \exp(-x^2)\, dx\,.$$

Poszczególne kroki w obliczeniach proszę starannie uzasadnić.

Wskazówka: Można zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$, a następnie spróbować wykorzystać twierdzenie o 3 funkcjach i monotoniczność logarytmu.

241. Niech $f \in C(\mathbb{R})$ i niech $M > 0$. Udowodnić, że ciąg funkcyjny

$$f_n(z) = \frac{n}{2} \int_{z-\frac{1}{n}}^{z+\frac{1}{n}} f(y)\, dy$$

jest zbieżny do f jednostajnie na $[-M, M]$.

242. Załóżmy, że $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ jest

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\, dx \le \frac{C}{k}\,.$$