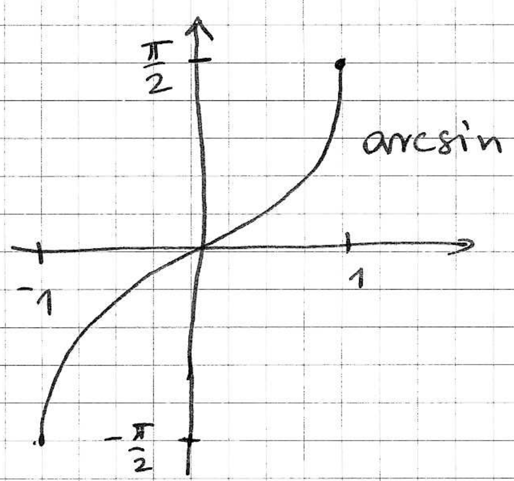
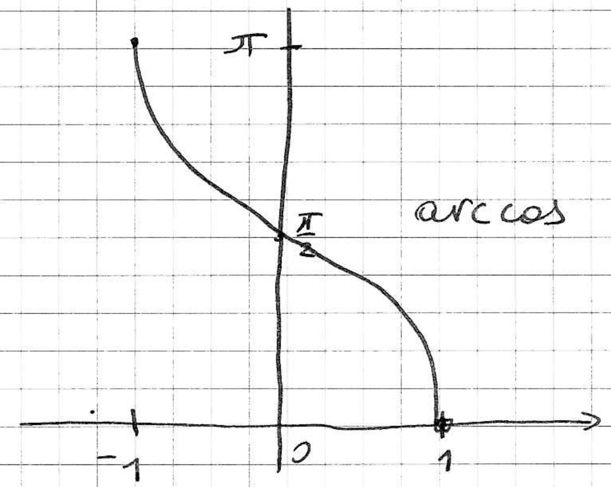
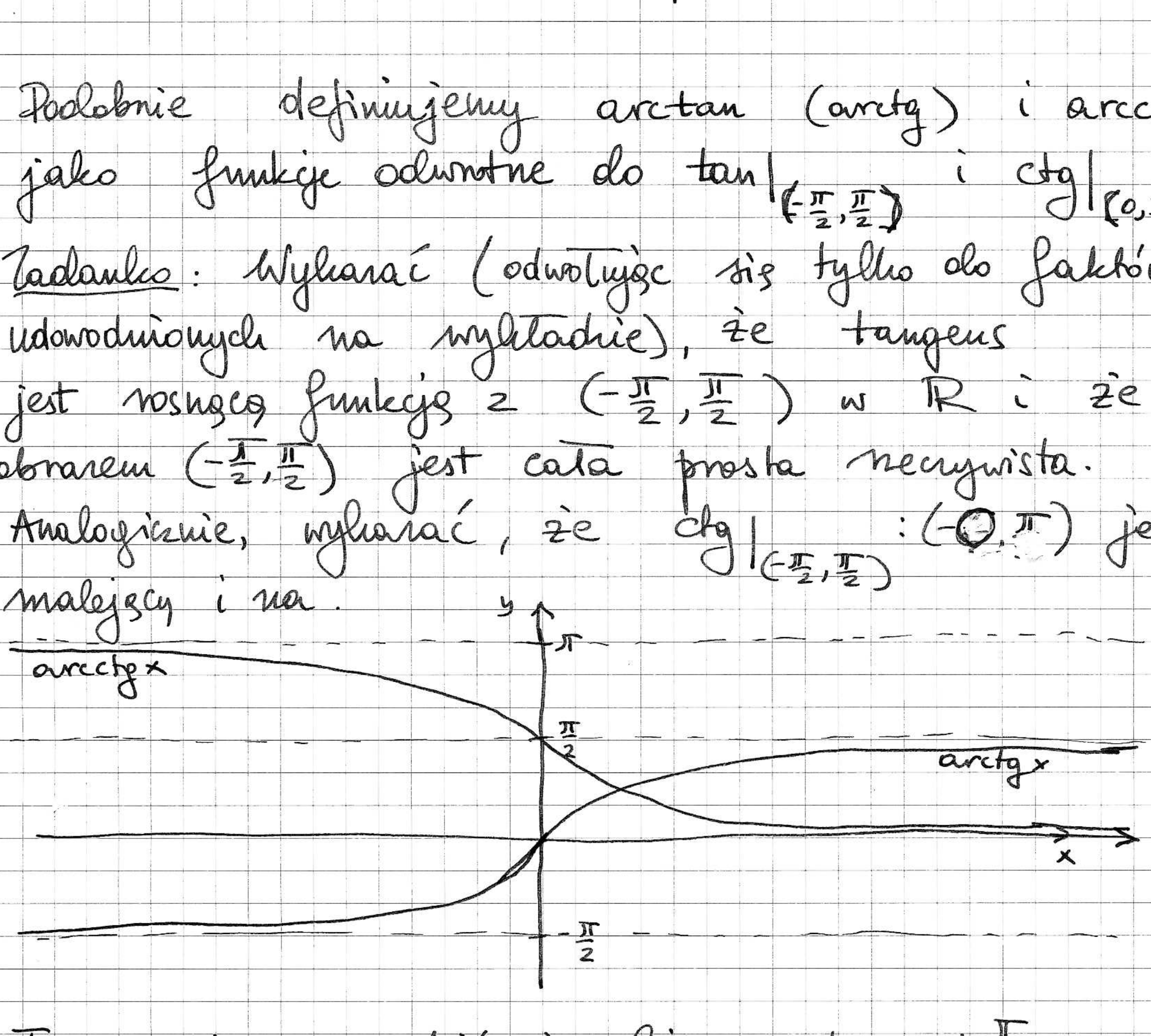
Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej mamy od razu, że arcsin i arccos są ciągłe na $[-1,1]$





Podobnie definiujemy arctan (arctg) i arcctg, jako funkcje odwrotne do $\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ i $\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}$

Zadanko: Wykazać (odwołując się tylko do faktów udowodnionych na wykładzie), że tangens jest rosnącą funkcją z $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ w $\mathbb{R}$ i że obrazem $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ jest cała prosta rzeczywista. Analogicznie, wykazać, że $\mathrm{ctg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (0,\pi)$ jest malejący i na.



Łatwo można sprawdzić, że $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{ar\cancel{c}ctg}\, x = \pm\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}(1\mp 1) = \begin{cases} \pi & x\to-\infty \\ 0 & x\to+\infty \end{cases}.$$

Na koniec ogólnych rozważań o ciągłości kilka ważnych faktów i definicji.

tu musimy dopiero zdefiniować zbieżność ciągów

Def: Mówimy, że $A \subset \mathbb{R}$ (ew. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^{17}$ itp) jest domknięty, gdy A zawiera wszystkie swoje ~~(skończone punkt~~ skończone punkty skupienia.

Tj. jeżeli mamy ciąg elementów A zbieżny do granicy skończonej, to ta granica również należy do A.

Przykłady:

- $\mathbb{R}$ jest domknięty
- zbiór pusty jest domknięty
- punkt jest domknięty
- $[0,1]$ też, a $(0,1]$ nie (brak $0 \in Acc((0,1])$)
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ jest domknięty ($\mathbb{N}$ nie ma skończonych punktów skupienia)

Twierdzenie:

Część wspólna (dowolnie licznej) rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

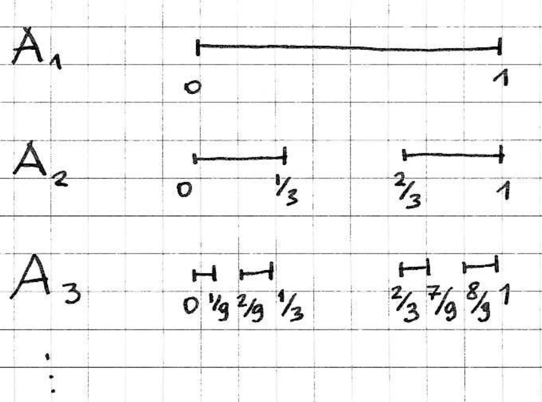
Dowód: (abstract nonsense) Oznaczmy naszą rodzinę przez $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$; $B = \bigcap_{i\in I} A_i$ niech będzie częścią wspólną zbiorów z $\mathcal{A}$.

Weźmy dowolny zbieżny ciąg elementów B, ozn. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Skoro $\forall_n\, x_n \in B$, to $\forall_n \forall_{i \in I}\, x_n \in A_i$; zbiór A_i jest domknięty

$\Rightarrow \forall_i \lim_{n\to\infty} x_n \in A_i \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{i\in I} A_i = B \Leftrightarrow B$ jest domknięty.

Wniosek: Zbiór Cantora jest domknięty (jako część wspólna zbiorów A_i – kolejnych etapów swojej konstrukcji):



Żeby upewnić się, że każdy z powyższych zbiorów A_i jest domknięty, przyda nam się ~~twierdz~~

Twierdzenie: Suma skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Dowód: ~~Niech~~ Oznaczmy zbiory te przez $A_1, \dots, A_m$.
Rozważmy ciąg (x_n) zbieżny do x_0, tż. $\forall_n \; x_n \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, a więc ~~$\forall_i$~~ $\forall_n$ x_n należy do któregoś ze zbiorów $A_1, \dots, A_m$ (być może do więcej niż jednego).
W którymś z A_i (ozn. A_j) musi być nieskończ. wiele elementów ciągu (x_n) (zasada ~~szu~~ szufladkowa); ustawiając je wg. rosnących indeksów dostajemy podciąg (x_{n_k}) tż $\forall_k \; x_{n_k} \in A_j$. Podciąg ten jest również zbieżny do x_0, A_j jest domknięty $\Rightarrow x_0 \in A_j \Rightarrow$ $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. □

Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$, itd) nazywany otwartym, gdy $\forall_{x \in A} \; \exists_{\varepsilon > 0} \; \forall_{y \in \mathbb{R}} \; |x-y| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$

Inaczej: jeżeli $x \in A$, to również pewien odcinek otwarty postaci $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, dla $\varepsilon > 0$, należy do A.
(w $\mathbb{C}$ – koło otwarte o promieniu $\varepsilon > 0$ i środku w x)

Przykłady: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $(0,1)$, $(0,\infty)$, $(0,1) \cup (2,3)$

Twierdzenie: A jest otwarty $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus A$ jest domknięty

Dowód: Nie bardzo trudne, ale pouczające ćwiczenie, proszę pomyśleć, podam go później!

Wnioski:

1. Suma dowolnie licznej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym
(bo $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus A_i)}_{\text{domknięty}}$ – prawo de Morgana)

2. Część wspólna skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym
(dowód jak wyżej).

Po co nam to?

Problem:
Rozważmy funkcję $f : A \cup B \to \mathbb{R}$. Wiemy, że $f|_A$ i $f|_B$ jest ciągła (ew. jednostajnie ciągła).
Czy f jest ciągła (jedn. ciągła)? na $A \cup B$?

W ogólności nie: $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$

$f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$, f nieciągła w 0

Albo jeszcze gorzej: $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f|_A = 1$, $f|_B = 0$
– funkcja Dirichleta, nieciągła nigdzie.

Ale

Twierdzenie: Niech A i B będą oba domknięte lub oba otwarte, $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ i niech $f|_A \to \mathbb{R}$ i $f|_B \to \mathbb{R}$ niech będą ciągłe na A i na B. Wówczas f jest ciągła na $A \cup B$.

Dowód

~~Dowód~~ Rozważmy dowolny ciąg (x_n) elementów zbioru $A \cup B$, zbieżny do $x_0 \in A \cup B$. Musimy udowodnić, że $(f(x_n))$ dąży do $f(x_0)$.

Załóżmy, że zbiory A i B są otwarte. Punkt x_0 należy do A lub do B (bo należy do $A \cup B$); załóżmy bez straty ogólności, że $x_0 \in A$.
A jest otwarty, więc $\exists_{\varepsilon > 0}$ tż $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \in A$.
Wiemy też, że $x_n \to x_0$, zatem dddn $x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, dokładniej: $\exists_N \forall_{n > N}$ $x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$. Ciąg (x_n) jest zatem, dla $n > N$, ciągiem elementów A.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f|_A (x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z ciągłości } f|_A \text{ na } A}}{=} f|_A(x_0) = f(x_0).$$

Jeżeli zaś A i B są domknięte, to mamy 3 możliwości: ~~(1) w ciągu (x_n) jest~~

(1) dla dost. dużych n $\quad x_n \in A$

(2) dddn $\quad x_n \in B \setminus A$

(3) możemy podzielić ciąg (x_n) na 2 podciągi: (y_n) i (z_n) odp. elementów zbioru A i zbioru B, bo w ciągu (x_n) jest niesk. wiele elementów zbioru A i zbioru $B \setminus A$.

W przypadku (1) ~~korzystając z ciągłości~~ z domkniętości zbioru A wiemy, że $x_0 \in A$ (jako granica ciągu elementów zbioru A); następnie z ciągłości $f|_A$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f|_A (x_n) = f|_A(x_0) = f(x_0).$$

W przypadku (2) postępujemy tak samo, jak w (1), zamieniając A na B.

W przypadku ③ wykazujemy (jak w ①), że $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$, (jak w ②) że $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(x_0)$ (bo $y_n \to x_0$, $z_n \to x_0$) i z tw. o scalaniu

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ x_0 \in A & x_0 \in B \end{array} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

□.

<u>Def</u>: Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ itd) jest <u>zwarty</u>, gdy z każdego ciągu elementów A możemy wybrać podciąg zbieżny do elementu A.

<u>Przykład</u>: tw. Bolzano-Weierstrassa mówi, że odcinek domknięty jest zwarty.

<u>Twierdzenie</u> (Heine-Borela) Podzbiór $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) jest zwarty $\Leftrightarrow$ jest domknięty i ograniczony.

Émile Borel (wł. Félix Édouard Justin Émile Borel) 1871–1956

<u>Szkic dowodu</u>: ~~(w $\mathbb{R}^n$)~~

$\Rightarrow$

① zbiór zwarty A jest domknięty. Gdyby bowiem nie był, to znaleźlibyśmy ciąg (x_n) zbieżny do x_0 taki, że $\forall_n\, x_n \in A$, ale $x_0 \notin A$. Z tego ciągu nie można wybrać podciągu zbieżnego do elementu A (bo wszystkie dążą do x_0).

② zbiór zwarty A jest ograniczony. Gdyby nie był, znaleźlibyśmy w A ciąg elementów (x_n) taki, że $|x_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Z takiego ciągu nie można wybrać podciągu zbieżnego do żadnej skończonej granicy.

$\Leftarrow$ Weźmy ciąg (x_n) elementów A.

Skoro A jest ograniczony, to $\exists_{M>0}$ tż. $A \subset [-M, M]$. ~~Przedział~~ Odcinek $[-M,M]$ jest zwarty, więc z (x_n) możemy wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny do $x_0 \in [-M, M]$, ale ~~skoro~~ zbiór A jest domknięty, więc jeżeli $\forall_k \, x_{n_k} \in A$ i $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$, to $x_0 \in A$.

$\square$

(170)

Wniosek: Zbiór Cantora jest zwarty.

W trzech ważnych twierdzeniach:

$$\left.\begin{array}{l}\text{twierdzeniu Weierstrassa o kresach funkcji ciągłej} \\ \text{twierdzeniu Heine-Cantora o jednostajnej ciągłości} \\ \text{i twierdzeniu o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji ciągłej} \\ \quad\text{(dowód 2)}\end{array}\right\}$$

na odcinku $[a,b]$

korzystaliśmy tylko z jednej własności odcinka $[a,b]$: z tego, że zachodzi tw. Bolzano-Weierstrassa. Dowody te przenoszą się bez zmian na dowolne zbiory zwarte:

Twierdzenie (Weierstrass) Funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje na nim swoje kresy

Twierdzenie (Heine-Cantor) Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest na nim jednostajnie ciągła

Twierdzenie (o funkcji odwrotnej) Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i różnowartościowej, określonej na zbiorze zwartym, jest ciągła.