Tw: Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna i niech $f(A)$ będzie odcinkiem, prostą lub półprostą. Wówczas f jest ciągła.

Dowód: Załóżmy bez straty ogólności, że f jest niemalejąca. Jeżeli x_0 jest punktem izolowanym A, to f jest w x_0 automatycznie ciągła.
Załóżmy zatem, że $x_0 \in A \cap \mathrm{Acc}\, A$.
W x_0 możemy obliczać lewo- i/lub prawostronną granicę f (w zal. od tego, czy $x_0 \in \mathrm{Acc}(A \cap (-\infty, x_0))$, czy $x_0 \in \mathrm{Acc}(A \cap (x_0, +\infty))$.

Załóżmy, że $x_0 \in \mathrm{Acc}(A \cap (-\infty, x_0))$. Z tego, że f jest monotoniczna, wiemy, że istnieje $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$; oczywiście $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ (bo $\forall_{x < x_0} f(x) \le f(x_0)$).

Jeżeli tu nie ma równości, to $\forall_{x<x_0} f(x) \le \sup_{x<x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$; $\forall_{x \ge x_0} f(x) \ge f(x_0)$ i w zbiorze wartości jest dziura - nie ma w nim żadnej wartości z przedziału $(\lim_{x \to x_0^-} f(x), f(x_0))$. A w prostej, półprostej czy odcinku dziur nie ma.

Analogicznie dowodzimy, że jeżeli ma sens $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, to jest równa $f(x_0)$.

Jeżeli teraz $(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} x_0$, $\forall_n\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$, to albo (x_n) nadaje się do obliczania granicy lewostronnej (dla dd n $x_n < x_0$), albo prawostronnej (dla dd n $x_n > x_0$), albo możemy go podzielić na podciąg wyrazów $< x_0$ i podciąg wyrazów $> x_0$. Tak czy tak otrzymujemy, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \left\{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ lub } \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right\} = f(x_0)$,

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ cyli f jest ciągła w x_0.

Twierdzenie Niech $f: I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem, i niech f będzie na I ciągła. Wówczas f jest różnowartościowa $\iff$ f jest ściśle monotoniczna. 155

Dowód: ($\Leftarrow$) Jeżeli f jest ściśle monotoniczna, to jest różnowartościowa.

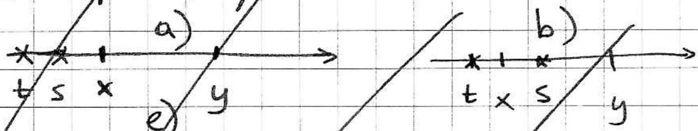
($\Rightarrow$) Załóżmy, że f jest różnowartościowa, ~~ale nie jest ściśle monotoniczna~~. Niech $x<y$, $x,y \in I$.

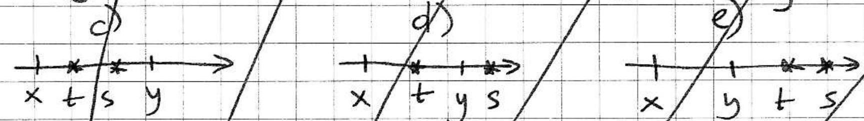
Mamy albo ① $f(x)<f(y)$, albo ② $f(x)>f(y)$

Możemy założyć, że zachodzi ①, w p.p. zastępujemy funkcję f funkcją $-f$.

Weźmy teraz dowolne $t,s \in I$, $t<s$.

Mamy kilka możliwości:





~~a)~~ wykażemy, że w każdym przypadku $f(t)<f(s)$. Załóżmy bowiem przeciwnie.

~~a)~~ α) 1. Zauważmy najpierw, że jeżeli $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in I$, to $f(\beta)$ leży między $f(\alpha)$ a $f(\gamma)$. Przyjmijmy bowiem, że $f(\alpha)<f(\gamma)$ (w p.p. zastępujemy f przez $-f$)

Jeżeli $f(\beta)<f(\alpha)$, to ~~w przedziale~~ $f(\alpha) \in (f(\beta), f(\gamma))$, więc w (β,γ) $\underbrace{\text{znajdę}}_{\text{z tw. Darboux.}}$ ξ t.ż. $f(\xi)=f(\alpha)$ ↯ z różnowart.

Jeżeli $f(\beta)>f(\gamma)$, to $f(\gamma) \in (f(\alpha), f(\beta))$ i w (α,β) znajdę ξ t.ż. $f(\xi)=f(\gamma)$ ↯. Stąd $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$.

2. Załóżmy teraz, że dla pewnych $\overset{x<y}{x,y \in I}$ $f(x)<f(y)$.

Niech $t,s \in I$, $t<s$.

Mamy 5 możliwości: ① $t<s<x<y$, ② $t<x<s<y$, ③ $x<t<s<y$, ~~tez~~ $\cancel{x<y}$ ④ $x<t<y<s$, ⑤ $x<y<t<s$.

(156)

Wykażemy, że w każdym z nich $f(t)<f(s)$.

Gdyby bowiem $f(t)>f(s)$, to ① z 1. $f(s)$ leży między $f(t)$ a $f(x)$ $\Rightarrow$ $f(s)>f(x)$, ale również z 1. $f(x)$ leży między $f(s)$ a $f(y)$ $\Rightarrow f(s)<f(x)$ ↯

② $f(x)\in(f(s),f(t)) \Rightarrow f(x)>f(s)$, ale $f(s)\in(f(x),f(y)) \Rightarrow$
$f(x)<f(s)$ ↯

③ $\cancel{f(t)\in}$ $f(t)$ leży między $f(x)$ a $f(s)$. $\Rightarrow f(x)>f(t)$

~~a) $f(t)>f(x)$, to $f(t)<f(s)$ ↯~~

ale $f(s)$ leży między $f(t)$ a $f(y) \Rightarrow f(t)>f(y)>f(x)$ ↯

④ $f(t)$ leży między $f(x)$ a $f(y) \Rightarrow f(t)<f(y)$, ale $f(y)$ leży między $f(t)$ a $f(s) \Rightarrow f(t)>f(y)$ ↯

⑤ $f(y)$ leży między $f(t)$ a $f(x) \Rightarrow f(t)>f(y)$, ale $f(t)$ leży między $f(y)$ a $f(s) \Rightarrow f(y)>f(t)$ ↯.

□.

Twierdzenie: Jeżeli f jest różnowartościowa na I, to funkcja odwrotna do f, tzn. f^{-1}, jest ciągła na $f(I)$.

Dowód 1. Z poprzedniego twierdzenia f jest ściśle monotoniczna. Funkcja odwrotna do funkcji ściśle monotonicznej jest ściśle monotoniczna (tryw. ćwiczenie z WdM), obrazem f^{-1} jest przedział I, zatem f^{-1} jest ciągła.

Dowód 2, gdy $I=[a,b]$ nie wprost. Skoro f^{-1} nie jest ciągła w $f(I)$, to istnieje ciąg (z_n) zbieżny w $f(I)$ do z_0, tż $f^{-1}(z_n)\not\to f^{-1}(z_0)$ (czyli ta ostatnia granica albo nie istnieje, albo jest $\neq z_0$).

Niech teraz $x_n = f^{-1}(z_n)$, $x_0 = f^{-1}(z_0)$.
Skoro $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ nie dąży do x_0, to istnieje podciąg $(x_{n_k}) = (\tilde{x}_k)$ ciągu (x_n) taki, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ i $\forall_{k\in\mathbb{N}}$ $|\tilde{x}_k - x_0| \geq \varepsilon$

Z ciągu $(\tilde{x}_k)$ możemy, na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg $(\tilde{x}_{k_l}) = (\check{x}_l)$ zbieżny do pewnego $\check{x}_0 \in [a,b]$; oczywiście $x_0 \neq \check{x}_0$

Z ciągłości funkcji f mamy

$$f(\check{x}_0) = f(\lim_{l\to\infty} \check{x}_l) = \lim_{l\to\infty} f(\check{x}_l) = \lim_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = f(x_0)$$

co jest sprzeczne z różnowartościowością f (wiemy, że $\check{x}_0 \neq x_0$).

Jednostajna ciągłość

Def Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na A, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x,y\in A} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Porównajmy tę definicję z poprzednio napisaną definicją ciągłości na A:

$$\forall_{x\in A} \ \underbrace{\exists_{\varepsilon>0} \ \forall_{\delta>0} \ \forall_{y\in A} \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}_{\text{ciągłość w punkcie } x.}$$

Różnica jest tylko w kolejności kwantyfikatorów: gdy f jest jednostajnie ciągła, przepis na dobieranie δ do ε nie zależy od wyboru punktu x; ten sam przepis „działa" we wszystkich $x \in A$.

Przykłady

1. sinus jest jednostajnie ciągły na $\mathbb{R}$.

Zauważmy najpierw, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; |\sin x| \leq |x|$. (*)

Dla $x \in (0,2]$ udowodniliśmy, że $0 < \sin x < x$;

dla $x > 2$ $|\sin x| \leq 1$, więc (*) zachodzi,

dla $x = 0$ $|\sin x| = |x| = 0$

dla $x \in [-2, 0)$ mamy $x < \sin x < 0$

(bo $\sin x = -\sin(-x)$, $-x \in (0,2]$ i korzystamy z),

więc $|\sin x| < |x|$,

dla $x < -2$ $|x| > 2$, $|\sin x| \leq 1$, więc (*) zachodzi.

Teraz $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \; |\sin x - \sin y| = \left|2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \overset{(*)}{\leq}$

$$\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|.$$

Jeżeli więc dla ustalonego $\varepsilon > 0$ przyjmiemy $\delta = \varepsilon$, to jeżeli $|x-y| < \delta = \varepsilon$, to $|\sin x - \sin y| < \varepsilon$.

(podaliśmy przepis dobry dla każdego x).

2. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1)$. (choć jest na $(0,1)$ ciągła).

Gdyby bowiem była, to ustalmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrana do tak ustalonego ε.

$\forall_{x,y\in(0,1)} \; |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{2}$.

Niech teraz $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$.

$\forall_n\ f(x_n) = 1,\ f(y_n) = -1$, zatem $\forall_n\ |f(x_n) - f(y_n)| = 2$,

choć $|x_n - y_n| \xrightarrow{n\to\infty} |0-0| = 0$, więc dddn $|x_n - y_n| < \delta$, jaka by δ nie była.

3. $f(x) = x^2$ nie jest jednostajnie ciągła na $(0,\infty)$.

Dobierzmy bowiem $\delta > 0$ do $\varepsilon = 1$. (dowód nie wprost)
i niech $y = x - \delta/2$ (wtedy $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$).
Mamy
$$f(x) - f(y) = x^2 - \left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2 = x\delta - \delta^2$$
i jeżeli tylko $x > \frac{1+\delta^2}{\delta}$, to
$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) > \delta \cdot \frac{1+\delta^2}{\delta} - \delta^2 = 1 = \varepsilon.$$
– sprzeczność. $\lightning$

<u>Def</u>. Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ spełnia na A warunek Lipschitza (ze stałą L), lub: jest lipszycowska (ze stałą L), jeżeli $\forall_{x,y\in A}\ |f(x) - f(y)| \le L|x-y|$

Przykłady: 1. $x \mapsto \sin x$ jest lipszycowska ze stałą 1.
2. x^2 jest lipszycowska na $[0,2]$ ze stałą 4,
bo
$$|x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y| \le 4|x-y|, \text{ gdy } x,y \in [0,2].$$

3. $\sqrt{x}$ nie jest lipszycowska na $[0,1]$. (z żadną stałą).
Załóżmy bowiem, że $\exists_{L>0} : \forall_{x,y\in[0,1]}\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le L|x-y|$.
Niech $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$. Podstawiając $x = x_n$, $y = y_n$ mamy

$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \le L \cdot \frac{1}{n} \iff \sqrt{n}(\sqrt{2}-1) \le L$ ⟵ i to ma zachodzić $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ – ale nie może, bo lewa strona dąży do ∞, gdy $n \to \infty$. $\lightning$.

Twierdzenie: Jeżeli f jest lipszycowska na A, to jest na A jednostajnie ciągła. (w szczególności jest ciągła).

Dowód: powtarzamy argument dla sinusa. (160)

Wiemy, że dla pewnej stałej $L>0$

$$\forall_{x,y\in A} \; |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|.$$

~~Weźmy~~ Ustalmy $\varepsilon>0$ i przyjmijmy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. ← przepis, niezal. od wyboru x.

Jeżeli tylko $|x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, to

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < \delta L = \varepsilon.$$

Georg Ferdinand Ludwik Philipp Cantor (1845-1918)

Twierdzenie (Heine - Cantora)

Jeżeli $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$, to jest na $[a,b]$ jednostajnie ciągła.

(Inaczej: każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym jest na nim jednostajnie ciągła).

Dowód: (nie wprost).

Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest na $[a,b]$ ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła, czyli

$$\sim\left(\forall_{\varepsilon>0}\;\exists_{\delta>0}\;\forall_{x,y\in[a,b]}\; \cancel{|f(x)-f(y}\; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{\varepsilon>0}\;\forall_{\delta>0}\;\exists_{x,y\in[a,b]}\; |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \exists_{\varepsilon>0}\;\forall_{\delta>0}\; A_\delta = \{(x,y)\in[a,b]\times[a,b] : |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Rozważmy rodzinę $\{A_{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ - jest to rodzina zbiorów niepustych, możemy więc (znów pewnik wyboru) wybrać selektor: ciąg (x_n,y_n) t.ż. $\forall_n\; (x_n,y_n)\in A_{1/n}$;

inaczej: istnieją ciągi (x_n) i (y_n) elementów $[a,b]$ t.ż.

$$\forall_n\; |x_n-y_n|<\frac{1}{n} \quad\wedge\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon.$$

2 tw. Bolzano-Weierstrassa z ciągu (x_n) możemy wybrać podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do pewnego $x_0 \in [a,b]$. Wiemy, że $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, (161)

zatem $y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ $\left(x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \right)$.

Funkcja f jest ciągła, zatem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k})$, ale wówczas

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| \xleftarrow[k\to\infty]{} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \underset{\uparrow}{\geq} \varepsilon > 0 \quad \lightning \text{ (z tw. o szacowaniu)}$$

dla każdego $k\in\mathbb{N}$. $\square$

Wniosek: Istnieją funkcje jednostajnie ciągłe nie spełniające warunku Lipschitza, np $f(x)=\sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0,1]$, choć nie jest na tym zbiorze lipszycowska.

Twierdzenie: Funkcja ciągła na odcinku otwartym jest na nim jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jej granice jednostronne w końcach odcinka.

Zapiszmy treść tego twierdzenia nieco precyzyjniej:
Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie ciągła na (a,b).
Funkcja f jest jednostajnie ciągła na (a,b) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Dowód:

Na początek prościutka, ale ważna

Uwaga: Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest na A ciągła / jednostajnie ciągła, to dla dowolnego $B \subset A$ funkcja $f|_B : B \to \mathbb{R}$ też jest ciągła / jednostajnie ciągła.

Dowód uwagi – oczywisty; ~~funkcja~~ jeżeli f spełnia warunek ciągłości $\forall_{x \in A}$, to również $\forall_{x \in B}$; jeżeli $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x,y \in A} |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$, to tym bardziej $\forall_{x,y \in B}$. $\square$.

Załóżmy teraz, że $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła na (a,b) i ma skończone granice $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Zdefiniujmy

$$\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ \lim_{x \to a^+} f(x) & x = a \\ \lim_{x \to b^-} f(x) & x = b \end{cases}$$

Oczywiście tak zdefiniowana $\tilde{f}$ jest ciągła na $[a,b]$, jest więc (tw. Heine-Cantora) na $[a,b]$ jednostajnie ciągła. Stąd $f = \tilde{f}|_{(a,b)}$ jest (Uwaga) jednostajnie ciągła na (a,b).

Pozostał nam dowód w drugą stronę: jeżeli f jest jednostajnie ciągła na (a,b), to ma w a i b odp. granice jednostronne.

Wykażemy istnienie $\lim_{x \to a^+} f(x)$, dowód istnienia $\lim_{x \to b^-} f(x)$ przebiega dokładnie tak samo.

(Dowód nie wprost)

Gdyby nie istniała skończona $\lim_{x \to a^+} f(x)$, to znaleźlibyśmy ciąg $x_n \to a$, $x_n > a$ taki, że $(f(x_n))$ nie ma granicy skończonej, a więc nie spełnia warunku Cauchy'ego. My jednak wykażemy, że każdy taki ciąg spełnia w.C.:

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy doń $\delta > 0$ tak, by $\forall_{x,y \in (a,b)} \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Skoro ciąg (x_n) jest zbieżny (do a), to znajdziemy N takie, że $\forall_{n,m > N} \; |x_n - x_m| < \delta$ (w.C. dla ciągu (x_n)).

Stąd wynika już, że $\forall_{n,m > N} \; |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, a więc $(f(x_n))$ spełnia w.C. ↯

Funkcje cyklometryczne

Jak wykazaliśmy, funkcje sinus i cosinus są okresowe, nie są więc, jako funkcje z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, odwracalne. Jeżeli jednak dostatecznie ograniczymy ich dziedziny, otrzymamy funkcje różnowartościowe:

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{jest ściśle malejący}$$

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{jest ściśle rosnący}$$

Funkcję odwrotną do $\cos|_{[0,\pi]}$ nazywamy arcus-cosinusem i oznaczamy $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Analogicznie arcus-sinus to funkcja odwrotna do $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$; $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$