Jedna z ważniejszych definicji w matematyce:

Def. Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in A$, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) tż $\forall_n\, x_n \in A$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

$$\left(= f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right)$$

Uwagi: 1. Jeżeli $x_0 \in A$, ale nie jest punktem skupienia zbioru A (mówimy wówczas, że jest punktem izolowanym A), to jedynym ciągiem elementów zbioru A zbieżnym do x_0 jest ciąg stały $x_n \equiv x_0$. Wówczas oczywiście $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$, a więc w punktach izolowanych każda funkcja jest ciągła.

2. Jeżeli $x_0 \in A \cap \operatorname{Acc} A$, to z ciągłości f w x_0 oczywiście wynika, że f ma w x_0 granicę równą $f(x_0)$. Jest też odwrotnie: jeżeli f ma w x_0 granicę i jest ona równa $f(x_0)$, to f jest w x_0 ciągła.

Dowód: Niech $(x_n) \subset A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. W ciągu (x_n) może pojawiać się (i to wielokrotnie) wyraz równy x_0. Mamy 3 możliwości: ($\cdot$) albo ciąg (x_n) jest od pewnego n_0 stale równy x_0, ($\cdot\cdot$) albo ~~możemy~~ istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ $x_n \neq x_0$, ($\cdot\cdot\cdot$) albo możemy (x_n) rozłożyć na 2 podciągi: jeden, (b_n), nie zawierający x_0 (tj $\forall_n\, b_n \neq x_0$), drugi, (c_n), stale równy x_0.

W przypadku ($\cdot$) ciąg $(f(x_n))$ jest od $n = n_0$ stale równy $f(x_0)$, jest więc do $f(x_0)$ zbieżny.

W przypadku ($\cdot\cdot$) ciąg x_n, po odrzuceniu pierwszych n_0 wyrazów, nadaje się do obliczania $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. ~~#~~ $\not=$

$\parallel$ z założenia

$f(x_0)$

W przypadku $(\cdot\cdot)$ $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(x_0)$

i z tw. o scalaniu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,

co, z dowolności wyboru (x_n), oznacza, że f jest w x_0 ciągła.

□

Def: $f: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła (na zbiorze A), jeżeli f jest ciągła we ~~w~~wszystkich punktach zbioru A.

Nasza definicja ciągłości była wyraźnie w duchu def Heinego granicy funkcji. A jak zapisać ciągłość przy pomocy ε i δ?

(ε-δ - definicja ciągłości)

Twierdzenie $f: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in A$ wtedy i tylko ~~f~~ wtedy, gdy $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in A} |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Dowód: Jeżeli x_0 jest punktem izolowanym, to ~~po pierw~~ z jednej strony f jest w nim (automatycznie) ciągła, z drugiej - istnieje $\delta_0>0$ tż $|x-x_0|<\delta_0 \wedge x\in A \Rightarrow$
$\Rightarrow x=x_0$.

(inaczej: $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\cap A = \{x_0\}$) (dowód nie wprost, ćwiczenie).

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon>0$ możemy wziąć $\delta=\delta_0$; jeżeli $|x-x_0|<\delta$, ~~wówczas~~ to $|f(x)-f(x_0)| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Jeżeli natomiast x_0 ~~nie~~ jest punktem skupienia zbioru A, to warunek

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in A} \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

dla $x=x_0$ jest w oczywisty sposób spełniony, a dla $x\neq x_0$ jest równoważny temu, że $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (def. Cauchy'ego).

Z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy mamy natychmiast:

<u>Twierdzenie</u>: (o własnościach arytm. ciągłości)
Niech $f, g : A \to \mathbb{R}$ będą ciągłe w $x_0 \in A$.
Wówczas funkcje $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, $x \mapsto f(x) \pm g(x)$ są ciągłe w x_0. Jeżeli $g(x_0) \neq 0$, to również funkcja $x \mapsto f(x)/g(x)$ jest ciągła w x_0.

<u>Uwaga</u>: Z $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest pewien kłopot – by była to funkcja określona na A, musimy założyć, że $g(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in A$. Jeżeli jednak $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$, to ~~(z tw. o szacowaniu)~~ istnieje $\delta > 0$ t.ż. funkcja g jest różna od 0 na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ (wystarczy w ~~def.~~ ε-δ-definicji ciągłości wziąć $\varepsilon < |g(x_0)|$), a więc $\frac{f}{g}$ jest na pewno dobrze określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, ~~o czym wiemy,~~ a w x_0, na mocy twierdzenia, jest ciągła.

Przykłady funkcji ciągłych:

1. ~~wielomiany:~~ funkcje stałe są ciągłe na $\mathbb{R}$
2. $f(x) = x$ jest ciągła na $\mathbb{R}$
3. z powyższych 2. przykładów i tw. o własnościach arytm. ciągłości wiemy, że dowolny wielomian
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
jest ciągły na $\mathbb{R}$
4. Dowolna funkcja wymierna $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q są wielomianami, jest ciągła we wszystkich $x_0 \in \mathbb{R}$ takich, że $Q(x_0) \neq 0$.

5. Pracowicie dowiedliśmy, od początku semestru, że

- funkcja wykładnicza jest ciągła na $\mathbb{R}$
- ln jest ciągły na $(0, \infty)$
- funkcje sin i cos są ciągłe na $\mathbb{R}$

Twierdzenie: Niech $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$, i niech $\forall_{x \in A} f(x) \in B$ (a więc B zawiera zbiór wartości f). Jeżeli f jest ciągła w $x_0 \in A$, g jest ciągła w $f(x_0) \in B$, to $g \circ f$ jest ciągła w x_0

Dowód: Niech $A \ni x_n \to x_0$. Ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ z ciągłości f, dąży do $f(x_0)$, zatem, z ciągłości g, $(g(f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do $g(f(x_0))$.

cd. przykładów

- dla $a > 0$ funkcja $f(x) = a^x$ $(= \exp(x \ln a))$ jest ciągła na $\mathbb{R}$

- dla $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x^a$ $(= \exp(a \ln x))$ jest ciągła na $(0, \infty)$.

Gdy $a > 0$, f jest określona również w $x = 0$. Czy jest tam ciągła?

Weźmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t. że $\forall_n\ x_n > 0$, $x_n \to 0$. Dddn $0 < x_n < 1$, wówczas, biorąc $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{k} < a$ (np $k = [\frac{1}{a}] + 1$)

mamy $0 < x_n^a < x_n^{1/k}$.

Wykażemy, że $x_n^{1/k} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, co z tw. o 3 ciągach da $\lim_{n \to \infty} x_n^a = 0$, czyli $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Jeżeli bowiem $x_n^{1/k} \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$, to znajdziemy podciąg $(x_{n_m}^{1/k})_m$

mającą granicę $g \neq 0$ (być może $+\infty$).
Wtedy $0 \leftarrow x_{n_m} = \left(x_{n_m}^{1/k}\right)^k \longrightarrow g^k$, czyli $g^k = 0$ ↯

• gdy zdefiniujemy $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$)

to tg będzie ciągły na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$,
a ctg na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

miejsca zerowe mianownika.

Pora na przykłady funkcji nieciągłych

• ~~f(x) = {~~ $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ jest nieciągła

w $x_0 = 0$: ma w 0 granice jednostronne
$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$
ale ani nie są one równe sobie, ani nie są równe $\operatorname{sgn} 0 = 0$. W $x_0 \neq 0$ jest ciągła.

• funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym $x_0 \in \mathbb{R}$. Wiemy bowiem, że x_0 możemy przybliżać ciągiem liczb wymiernych (a_n), ale też i ciągiem liczb niewymiernych (b_n).

$x_0 \neq a_n \to x_0$, $\forall_n\, f(a_n) = 1$, więc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$

$x_0 \neq b_n \longrightarrow x_0$, $\forall_n\, f(b_n) = 0$, więc $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0$

i f nie ma granicy w x_0.

- funkcja Riemanna

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad \text{lub} \quad x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \quad x = \frac{p}{q} \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ i } NWD(p,q) = 1 \end{cases}$$

jest ciągła w $x = 0$ i we wszystkich x niewymiernych i nieciągła w $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(Ćwiczenia).

Niech $z = \sup A$. Wykażemy, że $z \in (x,y)$ i że $f(z) = C$.

1. Oczywiście $z \in [x,y]$, bo $z \leq y$ i $z \geq x$ $(y \notin A, x \in A)$. 151

2. Załóżmy, że $f(z) > C$. Wówczas $g(z) = f(z) - C > 0$; funkcja $g(t) = f(t) - C$ jest ciągła na $[a,b]$, zatem istnieje $\delta > 0$ t.ż. dla $t \in (z-\delta, z+\delta)$ $g(t) > 0$

$$\iff f(t) > C.$$

Stąd ~~wsp f(z~~ ~~$z + \frac{\delta}{2}$~~ z nie może być $\sup A$, bo jeżeli z jest ogr. górnym A, to dowolna liczba z przedziału $(z-\delta, z)$ też — sprzeczność.

3. Załóżmy, że $f(z) < C$. Wtedy $\exists_{\delta > 0}$ t.ż. dla $t \in (z-\delta, z+\delta)$ $f(t) < C \Rightarrow (z-\delta, z+\delta) \subset A \Rightarrow z \neq \sup A$ ↯.

Stąd $f(z) = C$. Oczywiście $z \neq x$ i $z \neq y$ $\Rightarrow z \in (x,y)$.

~~Jeżeli $y < x$, to w powyższym dowodzie wystarczy wszędzie zamienić x z y.~~

Jeżeli $f(x) > C > f(y)$, to wystarczy w def. A zmienić znak $<$ na $>$ i minimalnie zmodyfikować punkty 2. i 3., ew. zauważyć, że jeżeli $f(x) > C > f(y)$, to kładąc $h(t) = -f(t)$ mamy

$h(x) < -C < h(y)$ i umiemy wykazać, że $\exists_{z \in [x,y]}$ t.ż. $h(z) = -C \iff -f(z) = -C \iff f(z) = C$.

Tw. (Weierstrassa o przyjmowaniu kresów)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to istnieją $x_0, \tilde{x}_0 \in [a,b]$ t.ż. $f(x_0) = \inf\limits_{[a,b]} f$,

$$f(\tilde{x}_0) = \sup\limits_{[a,b]} f.$$

Dowód:

$\forall_{n \in \mathbb{N}}$ liczba $\inf\limits_{[a,b]} f + \frac{1}{n}$ jest większa niż $\inf\limits_{[a,b]} f$,

więc $\forall_n$ zbiór $A_n = \{ x \in [a,b] : f(x) < \inf\limits_{[a,b]} f + \frac{1}{n} \}$ jest niepusty. Niech $\forall_n\ x_n \in A_n$. (pewnik wyboru :))

Z ciągu (x_n) możemy, na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg zbieżny $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

~~Oczywiście~~ $\cancel{\forall_k\ f(x_{n_k}) \geq \inf\limits_{[a,b]} f}$, ~~więc~~ $\cancel{\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) \geq \inf\limits_{[a,b]} f}$.

Oznaczmy $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ przez x_0. Wykażemy, że $f(x_0) = \inf\limits_{[a,b]} f$.

$$\forall_k \quad \inf_{[a,b]} f \leq f(x_{n_k}) \leq \inf_{[a,b]} f + \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \inf_{[a,b]} f,$$

stąd $\inf\limits_{[a,b]} f = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underset{\text{z ciągł. } f}{=} f(x_0)$.

Dowód istnienia $\tilde{x}_0$ przebiega analogicznie. $\triangleright$

Wniosek z tw Bolzano-Cauchy'ego

$$\forall_{\mathbb{C} \ni z \neq 0} \ \exists_{w \in \mathbb{C}} \quad \exp(w) = z.$$

Dowód: ~~z ciągłości sinusa~~

$$z = |z| \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \right).$$

Rozpatrzmy 4 przypadki:

1. $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} \geq 0$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} \geq 0$

Oczywiście $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$, więc

$0 \leq \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} \leq 1$, zatem (tw. Darboux + ciągłość cosinusa)

istnieje $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tż. $\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}$ (bo $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$)

Wtedy $\left(\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}\right)^2 = \frac{(\mathrm{Im}\, z)^2}{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = 1 - \frac{(\mathrm{Re}\, z)^2}{|z|^2} = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$,

a skoro $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} > 0$ i $\sin\varphi > 0$, to $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} = \sin\varphi$.

2. $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} \geq 0$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} < 0$ znajdujemy $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ tż.

$\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} = \cos\varphi$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} = \sin\varphi$

3. $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} < 0$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} \geq 0$ $\varphi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi]$

4. $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} < 0$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} < 0$ $\varphi \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

Zatem $\forall_{z \in \mathbb{C}}$ znajdę $\varphi \in [0, 2\pi)$ tż. $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} = \cos\varphi$, $\frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} = \sin\varphi$.

Stąd $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \exp(i\varphi) = \exp(\ln|z|)\exp(i\varphi)$
$= \exp(\ln|z| + i\varphi)$

i $w = \ln|z| + i\varphi$ (ale to nie jedyne takie w, bo exp jest okresowy!).