<u>Def</u>: (Heinego granicy funkcji f w x_0)

<u>Pierwsze podejście</u>

Mówimy, że f ma w x_0 granicę g ($g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \overset{\text{ozn}}{=} \overline{\mathbb{R}}$), jeżeli dla każdego ciągu (x_n) tż. $x_n \to x_0$, $\forall_n\, x_n \neq x_0$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Piszemy wtedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$.

Heinrich Eduard Heine (1821-1881)

Zastanówmy się, jakie warunki muszą być spełnione, by definicja powyższa miała sens.

1. Punkty x_n – wyrazy ciągu (x_n) – powinny należeć do dziedziny funkcji f. <u>Uwaga:</u> punkt x_0 niekoniecznie
2. Powinien istnieć choć jeden ciąg (x_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\forall_n\, x_n \neq x_0$.

<u>Przykład</u>: Niech f będzie określona na $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ (np. $f(n)$ = największa liczba pierwsza będąca dzielnikiem n)
$\lim_{x\to 2} f(x) = ?$ Nie ma żadnego ciągu elementów dziedziny f, który równocześnie dążyłby do 2 i nie był od pewnego miejsca stale równy 2.

<u>Uwaga</u>: Zapewne ma sens za to pytanie o $\lim_{x\to\infty} f(x)$, bo jest wiele ciągów w dziedzinie f, dążących do $+\infty$. Zatem x_0 może być równe $+\infty$.

<u>Def</u>. Mówimy, że $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ jest <u>punktem skupienia</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje ciąg (x_n) elementów zbioru $A \setminus \{x_0\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

<u>Przykłady</u>: 1. Zbiór skończony $A=\{a_1, \dots, a_m\}$ nie ma punktów skupienia.

Niech bowiem dla pewnego k istnieje ciąg (x_n) t.ż.

① $\forall_n \; x_n \in A \setminus \{a_k\}$

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_k$.

Niech $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|a_i - a_k| : i \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{k\}\}$

Z ② wiemy, że $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |x_n - a_k| < \varepsilon$, ale w przedziale $(a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$ nie ma żadnego elementu zbioru $A \setminus \{a_k\}$ (a $\forall_{n>n_0} x_n \in (a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon)$) $\lightning$

2. Jedynym punktem skupienia $\mathbb{N}$ jest $+\infty$ (gdyby $r \in \mathbb{R}$ było takim punktem skupienia, to:
   - albo $r \notin \mathbb{N}$, wtedy w przedziale $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, dla $\varepsilon < \min(r - [r], 1 + [r] - r)$, nie ma żadnej liczby naturalnej, nie ma więc ciągu liczb naturalnych zbieżnego do r
   - albo $r \in \mathbb{N}$, ale wtedy w przedziale $(r-1, r+1)$ nie ma żadnej liczby naturalnej różnej od r, nie ma ciągu liczb naturalnych różnych od r, zbieżnego do r.)

   Analogicznie, jedynymi punktami skupienia $\mathbb{Z}$ są $+\infty$ i $-\infty$.
3. Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Jedynym punktem skupienia A jest 0.
4. Punktami skupienia odcinka $(0,1)$ są wszystkie punkty odcinka $[0,1]$.

<u>Uwaga</u>: Z powyższych przykładów jasno wynika, że punkt skupienia zbioru A <u>nie musi</u> należeć do zbioru A.

Drugie podejście

Def. (Heinego granicy funkcji)

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru A. Mówimy, że f ma w x_0 granicę $g \in \mathbb{R}$, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) elementów $A \setminus \{x_0\}$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Piszemy wówczas $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$

Przykłady:

① Wykazaliśmy, że $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

② $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = ?$ Niech $x_n \to 1$, $\forall_n\ x_n \neq 1$. wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n - 1)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

Uwaga: ~~Wynik~~ To, czy f ma w x_0 granicę może zależeć od wyboru dziedziny f:

Niech $f_1(x) = \frac{1}{x}$ będzie określona na $A = (0, \infty)$, wtedy $\lim_{x\to 0} f_1(x) = +\infty$;

a gdy weźmiemy $f_2(x) = \frac{1}{x}$ określoną na $B = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, to $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ nie istnieje ($x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\forall_n\ x_n \neq 0$

$f_2(x_n) = n \to +\infty$;

$y_n = -\frac{1}{n} \to 0$, $\forall_n\ y_n \neq 0$,

$f_2(y_n) = -n \to -\infty$).

③ $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nie istnieje. Niech bowiem $x_n = n\pi$.

Oczywiście $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$; $\forall_n \sin x_n = 0$, więc $\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0$.

A gdy weźmiemy $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, otrzymamy $\forall_n\ \sin y_n = 1$, więc $\lim_{n\to\infty} \sin y_n = 1$, choć $y_n \to +\infty$.

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ i niech x_0 będzie takim punktem skupienia zbioru A, że istnieje ciąg $(x_n) \subset A$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ taki, że $\forall_n \; x_n > x_0$ $\left(\Leftrightarrow x_0 \in \mathrm{Acc}(A \cap (x_0, +\infty))\right)$, a więc takim, do którego można w zbiorze A „podejść" dowolnie blisko od prawej strony.

Jeżeli dla każdego takiego ciągu (x_n) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ i nie zależy ona od wyboru ciągu (x_n) (a więc dla każdego ciągu (x_n) spełniającego powyższe warunki $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$), to mówimy, że f ma w x_0 granicę prawostronną równą g, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$

Analogicznie, biorąc ciągi (x_n) t. ż. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; x_n \in A \wedge x_n < x_0$ definiujemy granicę lewostronną funkcji f w x_0, oznaczaną $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

<u>Uwaga</u>: Niech f ma w x_0 granicę lewostronną; zdefiniujmy $\tilde{f}: A \cap (-\infty, x_0) \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x) \;\; \forall_{x\in A\cap(-\infty,x_0)}$ (inaczej: $\tilde{f} = f|_{A\cap(-\infty,x_0)}$). Wówczas $\tilde{f}$ ma w x_0 granicę i $\lim\limits_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Analogicznie, definiując $\check{f} = f|_{A\cap(x_0,+\infty)}$, mamy

$$\lim_{x\to x_0} \check{f}(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$ o ile ta ostatnia granica istnieje.

Twierdzenie (o arytmetycznych własnościach granicy).

Jeżeli istnieją $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0} g(x)$ $(\in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$,

to

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

o ile tylko wynik jest dobrze określony w $\overline{\mathbb{R}}$.

Uwaga: Twierdzenie to stosuje się również do granic jednostronnych (bo, jak wynika z niedawnej Uwagi, są to zwykłe granice funkcji f z ograniczoną – do $A\cap(-\infty, x_0)$ lub $A\cap(x_0,+\infty)$ – dziedziną).

Dowód: Wprost z twierdzeń o arytmetycznych własnościach granicy ciągu.

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji

Chcemy zdefiniować $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$, gdzie $x_0, g\in\overline{\mathbb{R}}$

Intuicja: Ustalmy jakąś dopuszczalną maksymalną „odległość" wartości funkcji f od granicy. Mówimy, że f ma w x_0 granicę równą g, jeżeli dla x dostatecznie „bliskich" x_0, ale od x_0 różnych, $f(x)$ znajduje się w ustalonej wcześniej, dopuszczalnej „odległości" od g.

Problem: co to jest odległość od $\pm\infty$?
(znany nam już z definiowania granic niewłaściwych ciągów).
Mamy następujące możliwości:

1. $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}$ — 1 przypadek
2. $x_0 \in \{\pm\infty\}$, $g \in \mathbb{R}$ — 2 przypadki
3. $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in \{\pm\infty\}$ — 2 przypadki
4. $x_0 \in \{\pm\infty\}$, $g \in \{\pm\infty\}$ — 4 przypadki

9 przypadków!

Def: Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \operatorname{Acc} A$, jeżeli

1. $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \left(\forall_{x\in A}\right) 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

2. $$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{M} \quad \pm x > M \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$$

$\uparrow$ zgodnie ze znakiem $x_0 = \pm\infty$.

3. $$\forall_{M} \exists_{\delta>0} \quad 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \pm f(x) > M$$

$\uparrow$ zgodnie ze znakiem $g = \pm\infty$

4. $$\forall_{M} \exists_{N} \quad \pm x > N \Rightarrow \pm f(x) > M$$

$\uparrow$ zgodnie ze znakiem $x_0 = \pm\infty$ $\quad$ $\uparrow$ zgodnie ze znakiem $g = \pm\infty$.

Równoważność definicji granicy:

~~(Rozważmy tylko~~

Twierdzenie: ~~Jeżeli~~ f ma w x_0 granicę g w sensie def. Heinego wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w x_0 granicę g w sensie Cauchy'ego.

Dowód: (tylko 2 z 9 przypadków, reszta idzie tak samo!)

1. $x_0, g \in \mathbb{R}$. Heine $\Rightarrow$ Cauchy

$\Leftarrow$

Załóżmy, że $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = g$ w sensie Heinego, natomiast

$$\sim \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \cancel{\forall} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_x |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - g| > \varepsilon$$

czyli zbiór $A_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - g| > \varepsilon\} \neq \emptyset$.

Rozważmy $\delta = \frac{1}{n}$ i rodzinę zbiorów $A_{1/n}$. Skoro są niepuste, to (z pewnika wyboru) możemy wybrać ciąg (x_n) t. że $\forall_n \ x_n \in A_{1/n}$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0$$

ale $\forall_n |f(x_n) - g| > \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq g$ $\lightning$

Cauchy $\Rightarrow$ Heine.

Wiemy, że $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

Chcemy wykazać, że jeżeli $\underbrace{(x_n) \to x_0}_{\forall_n x_n \neq x_0}$, to $f(x_n) \to g$.

cyli że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |f(x_n)-g|<\varepsilon$.

Ustalmy $\varepsilon>0$, szukamy n_0. Do ε możemy dobrać $\delta>0$ z def. Cauchy'ego; niech teraz n_0 będzie takie, że $\forall_{n>n_0} |x_n-x_0|<\delta$ (znajdę, bo $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$)

Wtedy (z def Cauchy'ego) $|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-g|<\varepsilon$
i ~~tego~~ n_0 jest takie, jak trzeba.

2. Przypadek $g=+\infty$, $x_0=+\infty$. Cauchy $\Rightarrow$ Heine

To wiemy:
$\cancel{\forall_{\varepsilon}} \forall_{M} \exists_{N} \; x>N \Rightarrow f(x)>M$ (*)

Niech $x_n \to x_0=+\infty$ ~~$\forall_{N} \exists_{n_0}$ Dobi.~~ ~~Ustalmy $M>0$~~
~~i dobierzmy~~ Chcemy wykazać, że $f(x_n)\to+\infty$,
cyli $\forall_{M} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} f(x_n)>M$.

Ustalmy M, szukamy n_0. Dobierzmy N do M tak, jak mówi (*) i niech n_0 będzie takie, że $\forall_{n>n_0} x_n>N$ (można, bo $x_n\to+\infty$)

Wtedy $f(x_n)>M$.

Heine $\Rightarrow$ Cauchy (nie wprost.)

Załóżmy, że $\forall_{x_n\to+\infty} f(x_n)\to\infty$, ale

$$\sim\left(\forall_{M} \exists_{N} \; x>N \Rightarrow f(x)>M\right)$$

cyli $\exists_{M} \forall_{N} \underbrace{\{x:\ x>N \wedge f(x)\le M\}}_{A_N} \neq \emptyset$

Rozważmy rodzinę $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ niepustych podzb. $\mathbb{R}$ i niech (x_n): $\forall_{n} x_n\in A_n$ (pewnik wyboru!)
Wtedy $\forall_{n} x_n>n\to+\infty \Rightarrow x_n\to+\infty$, ale $\forall_{n} f(x_n)\le M \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_n) \not\to +\infty$ ↯

Jeszcze jedno twierdzenie, którego dowód wynika wprost z analogicznych twierdzeń dla ciągów.

Twierdzenie (o 3 funkcjach).

Niech $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ i $\forall_{x \in A}\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$; niech co więcej $x_0 \in \operatorname{Acc} A$ i $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$ (w szczególności obie te granice istnieją).
Wówczas istnieje $\lim_{x \to x_0} g(x)$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

Analogicznie, jeżeli $f, g : A \to \mathbb{R}$ i $\forall_{x \in A}\ f(x) \geq g(x)$ oraz dla $x_0 \in \operatorname{Acc} A$ a) $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, to $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, to $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

<u>Twierdzenie</u> (o składaniu). Niech $f: \overset{\mathbb{R}}{\overset{\cup}{A}} \to \overset{\mathbb{R}}{\overset{\cup}{B}}$, $g: B \to \mathbb{R}$,
~~Jeżeli zbiór~~ $x_0 \in \operatorname{Acc} A$.
Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\underset{\substack{x \in A \\ x \neq x_0}}{\forall} f(x) \neq y_0$ i $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$,
to $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$.

<u>Dowód</u>: Prościutkie ćwiczenie; proszę zauważyć, że z założeń wynika, że $y_0 \in \operatorname{Acc} B$.

<u>Def</u>. Kresami – górnym i dolnym – funkcji f na zbiorze A nazywamy odpowiednio kres górny i dolny zbioru jej wartości:

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$$

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

<u>Def</u>: Mówimy, że funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest

- <u>malejąca</u>, gdy $\underset{x,y \in A}{\forall} \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- <u>nierosnąca</u>, — " — — " — $\Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- <u>niemalejąca</u>, — " — — " — $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- <u>rosnąca</u>, — " — — " — $\Rightarrow f(x) < f(y)$.

Funkcję należącą do którejś z powyższych kategorii nazywamy funkcją <u>monotoniczną</u>; funkcje rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą funkcji <u>ściśle monotonicznych</u>

<u>Twierdzenie</u>: Funkcja monotoniczna ma granice jednostronne we wszystkich tych punktach dziedziny A, w których jest sens o nie pytać, tj.

- granice lewostronne ~~t.ż.~~ w tych x_0 ~~$\in A$~~, że $x_0 \in Acc(A \cap (-\infty, x_0))$
- — " — prawostronne — " — $x_0 \in Acc(A \cap (x_0, +\infty))$

<u>Dowód</u>: Udowodnimy twierdzenie dla f niemalejącej (obejmuje to przypadek f rosnącej, a jeżeli f jest nierosnąca, to $\tilde{f} = -f$ jest niemalejąca; jeżeli $\tilde{f}$ ma granice jednostronne, to f też).

Niech x_0 ~~$\in A$~~ będzie takie, że $x_0 \in Acc(A \cap (-\infty, x_0))$ (a więc x_0 jest takim punktem skupienia A, że istnieje ciąg (x_n) ~~z do~~ : ① $\forall_n\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$, ② $\forall_n\ x_n < x_0$ ③ $x_n \to x_0$)

Wykażemy, że dla każdego ciągu (x_n) spełniającego powyższe warunki ①-③ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ istnieje i jest taka sama, a precyzyjniej – jest równa
$g = \sup_{A\cap(-\infty,x_0)} f$. <u>Uwaga</u>: to supremum może być ~~...~~ $+\infty$.

Niech $g \in \mathbb{R}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Liczba ~~...~~ $g - \varepsilon$ jest mniejsza niż g, ~~sup~~ więc istnieje $y_\varepsilon \in A \cap (-\infty, x_0)$ ~~t.ż.~~ $f(y_\varepsilon) > g - \varepsilon$.
(i oczywiście $f(y_\varepsilon) \le g$). Liczba y_ε jest też (jak wszystkie elementy zbioru $A \cap (-\infty, x_0)$) mniejsza niż x_0, więc $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}$ ~~...~~ $y_\varepsilon < x_n$ ~~...~~

Skoro f jest niemalejąca, to

$$\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad \underset{\displaystyle g-\varepsilon}{\underset{\vee}{f(y_\varepsilon)}} \le f(x_n) \overset{\text{bo } g \text{ to supremum}}{\le} g$$

czyli, gdy $g \in \mathbb{R}$.

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad g - \varepsilon < f(x_n) < g + \varepsilon \iff g = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Przypadek $g = +\infty$ wymaga minimalnych zmian: ćwiczenie.