Funkcje trygonometryczne.

Def: $\forall_{z\in\mathbb{C}}$

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \\ \sin z &= \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} \end{aligned}\right\}\text{ wzory Eulera}$$

Twierdzenie (o własnościach funkcji trygonometrycznych)

① $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \sin^2 z+\cos^2 z=1$

② $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \exp(iz)=\cos z+i\sin z$

③ $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} \; ; \quad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$

i oba te szeregi są bezwzględnie zbieżne

④ Jeżeli $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ i $\forall_n \, z_n\neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin z_n}{z_n}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos z_n-1}{z_n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos z_n-1}{z_n^2}=-\frac{1}{2}.$$

⑤ $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \cos(-z)=\cos z, \quad \sin(-z)=-\sin z$

⑥ $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \sin x, \cos x\in\mathbb{R}\cap[-1,1], \quad \sin 0=0, \quad \cos 0=1$

⑦ jeżeli $\mathbb{C}\ni z_n\xrightarrow{n\to\infty} z$, to $\left.\begin{aligned}\sin z_n&\to\sin z\\ \cos z_n&\to\cos z\end{aligned}\right\}$ ciągłość

⑧ $\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \cos z-\cos w=-2\sin\frac{z-w}{2}\sin\frac{z+w}{2}$

$$\sin z-\sin w=2\sin\frac{z-w}{2}\cos\frac{z+w}{2}$$

Dalsze własności funkcji zmieścimy w kolejnych twierdzeniach.

Dowód:

① $$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}\right)^2 + \left(\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\exp(iz))^2 - 2\exp(iz)\exp(-iz) + (\exp(-iz))^2}{-4} +$$

$$+ \frac{(\exp(iz))^2 + 2\exp(iz)\exp(-iz) + (\exp(-iz))^2}{4} =$$

$$= \frac{-(\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz))}{4} + \frac{\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)}{4} =$$

$$= 1.$$

② $$\cos z + i\sin z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} + \cancel{i}\,\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2\cancel{i}} =$$

$$= \exp(iz)$$

③ $$\cos z = \frac{1}{2}\left(\exp(iz)+\exp(-iz)\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-iz)^k}{k!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k+(-i)^k}{2}\cdot\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k+(-i)^k}{2}\,\frac{z^k}{k!} =$$

k mod 4	i^k	$(-i)^k$	$\frac{i^k+(-i)^k}{2}$
0	1	1	1
1	i	$-i$	0
2	-1	-1	-1
3	$-i$	i	0

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l z^{2l}}{(2l)!}$$

Analogicznie

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz)-\exp(-iz)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\frac{(iz)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-iz)^k}{k!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k-(-i)^k}{2i}\,\frac{z^k}{k!}$$

i dorysowując kolumnę $\frac{i^k-(-i)^k}{2i}$ do tabelki dostajemy

0	0
1	1
2	0
3	-1

← zostają tylko wyrazy nieparzyste, ze znakami na zmianę,

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!}.$$

Bezwzględna zbieżność tych szeregów – wprost z kryt. d'Alemberta.

④ $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin z_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)-\exp(-iz_n)}{2iz_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)-1-(\exp(-iz_n)-1)}{2iz_n} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Bigg(\underbrace{\underset{\downarrow n\to\infty \atop 1}{\frac{\exp(iz_n)-1}{iz_n}} + \underset{\downarrow n\to\infty \atop 1}{\frac{\exp(-iz_n)-1}{-iz_n}}}_{\text{bo } iz_n\to 0,\ -iz_n\to 0.}\Bigg) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos z_n - 1}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\exp(iz_n)+\exp(-iz_n)}{2} - 1}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)+\exp(-iz_n)-2}{2z_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Bigg(\underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\exp(iz_n)-1}{iz_n}}\cdot i + \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\exp(-iz_n)-1}{-iz_n}}(-i)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(i+(-i)\right) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos z_n - 1}{z_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\exp(iz_n)+\exp(-iz_n)-2}{2z_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\exp(i\frac{z_n}{2})-\exp(-\frac{iz_n}{2})\right]^2}{2z_n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{\exp(i\frac{z_n}{2})-1-(\exp(-i\frac{z_n}{2})-1)}{z_n}\right]^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Bigg[\underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\exp(i\frac{z_n}{2})-1}{iz_n/2}}\cdot\frac{i}{2} - \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\exp(-i\frac{z_n}{2})-1}{-iz_n/2}}\left(-\frac{i}{2}\right)\Bigg]^2 = \frac{1}{2}i^2 = -\frac{1}{2}.$$

⑤ wprost z wzorów Eulera

⑥ Gdy $z = x \in \mathbb{R}$, to szeregi podane w ③ mają oczywiście sumy rzeczywiste, więc $\sin x$ i $\cos x \in \mathbb{R}$. Skoro $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, to $\sin^2 x \le 1$ i $\cos^2 x \le 1$ $\Rightarrow$ $|\sin x| \le 1$ i $|\cos x| \le 1$.

$\sin 0$, $\cos 0$ — wprost z wzorów Eulera.

(7) wprost z wzorów Eulera i analogicznej własności funkcji wykładniczej.

(8) rachunek z wzorów Eulera:

$$2\sin\frac{z-w}{2}\cos\frac{z+w}{2} = 2\left(\frac{\exp(i\frac{z-w}{2})-\exp(-i\frac{z-w}{2})}{2i}\right)\left(\frac{\exp(i\frac{z+w}{2})+\exp(-i\frac{z+w}{2})}{2}\right)$$

$$= \frac{\exp(iz)+\exp(-iw)-\exp(iw)-\exp(-iz)}{2i} = \sin z - \sin w.$$

analogicznie drugi wzór.

<u>Twierdzenie</u>: $\cos x$ ma na przedziale $[0,2]$ dokładnie jedno miejsce zerowe.

<u>Def</u>: Dwukrotność tego miejsca zerowego oznaczamy przez π.

By udowodnić to twierdzenie, potrzebujemy kilku lematów:

<u>Lemat</u>: Dla $x\in(0,2]$ zachodzą nierówności

$$0<\sin x<x.$$

<u>Dowód</u>

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+\left(\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)+\ldots+\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)\right]$$

Zauważmy, że dla $x\in(0,2]$ każdy z nawiasów jest dodatni - jest postaci $\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$;

$$\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}\overset{?}{>}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \iff \underbrace{(4k+2)(4k+3)}_{\geq 6}\overset{?}{>}\underbrace{x^2}_{\leq 4}$$

więc prawda.

stąd $\sin x > x-\frac{x^3}{3!} > 0$, gdy $x\in(0,2]$

Analogicznie

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left[x-\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}\right)-\left(\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}\right)-\ldots-\left(\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}-\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right)\right]$$

i znów każdy z nawiasów jest dodatni,

więc $\sin x \le x$ dla $x \in (0,2]$.

<u>Lemat</u>: $\cos x$ jest malejący na $[0,2]$, tj. jeżeli $0 \le x_1 < x_2 \le 2$, to $\cos x_1 > \cos x_2$.

Co więcej, $|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2|$ dla dow. $x_1, x_2 \in [0,2]$

<u>Dowód</u>:

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1+x_2}{2} = 2\underbrace{\sin\frac{x_2-x_1}{2}}_{\in[0,1]}\underbrace{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}_{\in[0,2]} > 0.$$

z popr. lematu.

Jeżeli $x_2 > x_1$, to

$$|\cos x_1 - \cos x_2| = 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\underbrace{\left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|}_{\le 1} \le 2\cdot\frac{x_2-x_1}{2} = x_2 - x_1 = |x_1 - x_2|$$

$$\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| = \left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right| = \sin\frac{x_2-x_1}{2} \le \frac{x_2-x_1}{2}$$

<u>Lemat</u>: $\cos x > 0$ dla $x \in [0,1)$, $\cos x < 0$ dla $x \in (\frac{5}{3}, 2]$

<u>Dowód</u>: $\cos 0 = 1$; jeżeli $x \in [0,1)$, to

$$\underbrace{|\cos x - 1|}_{=1-\cos x} = |\cos x - \cos 0| < |x - 0| = |x| < 1 \Rightarrow \cos x > 0.$$

Wykażemy teraz, że $\cos 2 < -\frac{1}{3}$:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) + \ldots + \left(\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} - \frac{2^{4n}}{(4n)!}\right)\right] =$$

$$< 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3}.$$

wszystkie nawiasy dodatnie więc suma szeregu tych nawiasów też.

Jeżeli więc $x \in (\frac{5}{3}, 2]$, to $|2-x| = 2-x < \frac{1}{3}$,
zatem $|\cos x - \cos 2| < \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x < 0$.

<u>Dowód twierdzenia</u>:

Rozważmy zbiór $A = \{x \in [0,2] : x \geq 0\}$.
Wiemy, że A jest niepusty, bo np $0 \in A$
i ogr. z góry (w oczywisty sposób przez 2, ale z lematu również np przez $\frac{5}{3}$); niech $x_0 = \sup A$. $(x_0 \in (1, \frac{5}{3})$

① wykażemy, że A jest odcinkiem. Niech $y \in [0, x_0)$, wtedy istnieje $\tilde{y} > y$, $\tilde{y} \in A$ (z def. supremum), a więc $y < \tilde{y} \in A$

$$y \in A. \Leftarrow \cos y > \cos \tilde{y} \geq 0$$

Tak więc $A = [0, x_0)$ lub $[0, x_0]$ (gdy $y > x_0$, to $y \notin A$).

② wykażemy, że $\cos x_0 = 0$

Niech $a_n = x_0 - \frac{1}{n}$, $b_n = x_0 + \frac{1}{n}$. Dla $n > 3$ wiemy, że $\cos a_n \geq 0$ (bo $a_n \in [0, x_0) \subset A$); $\cos b_n < 0$ (bo $b_n > x_0$, $b_n < 2$).

Stąd $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \cos a_n}_{\cos x_0} \geq 0$ i $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \cos b_n}_{\cos x_0} \leq 0 \Rightarrow \cos x_0 = 0$.

③ $\cos x$ jako funkcja malejąca na $[0,2]$ ma w tym przedziale co najwyżej jedno miejsce zerowe:
gdyby istniało $x_1 \neq x_0$ tż $x_1 \in [0,2]$, $\cos x_1 = 0$,
to albo $x_1 > x_0$, albo $x_1 < x_0$

$$\cos x_1 < \cos x_0 = 0 \qquad \cos x_1 > \cos x_0 = 0 \qquad \lightning.$$

Od tej chwili wyznaczone powyżej miejsce zerowe cosinusa, jedyne pomiędzy 0 a 2, oznaczać będziemy przez $\pi/2$.

<u>Twierdzenie</u>: Zachodzą wzory

1) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ 2) $e^{i\pi} + 1 = 0$

oczywiście $e^z \equiv \exp(z)$

<u>Dowód</u>

1) wiemy, że $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$, stąd $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$.
Z drugiej strony wiemy, że $\sin x > 0$ dla $x \in (0,2]$, a $\frac{\pi}{2} \in (0,2]$, co wyklucza $\sin\frac{\pi}{2} = -1$. Pozostaje $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i.$$

2) $e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1$ $\square$

<u>Wniosek</u>: $e^{2i\pi} = (e^{i\pi})^2 = (-1)^2 = 1.$

<u>Def</u>: Niech $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Mówimy, że $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest <u>okresem</u> funkcji f jeżeli $\forall_{z\in\mathbb{C}}\ f(z+T) = f(z)$.

<u>Twierdzenie</u> 1) $\forall_{k\in\mathbb{Z}}$ liczba $2\pi i k$ jest okresem funkcji exp

2) jeżeli $T \in \mathbb{C}$ jest okresem funkcji exp, to $\exists_{k\in\mathbb{Z}}\ T = 2\pi i k$.

<u>Dowód</u>

1) $\forall_{k\in\mathbb{Z}} \forall_{z\in\mathbb{C}} \exp(z + 2\pi i k) = \exp(z)\exp(2\pi i k) = \exp(z)\cdot[\exp(2\pi i)]^k$
$= \exp(z)\cdot 1^k = \exp(z)$

2) Jeżeli $\forall_{z\in\mathbb{C}} \underbrace{\exp(z+T)}_{\exp(z)\exp(T)} = \exp(z)$, to $\exp(T) = 1$

Stąd $1 = |\exp(T)| = \exp(\operatorname{Re} T) \Rightarrow \operatorname{Re} T = 0.$
Niech $T = it$; $t = \operatorname{im} T$. ~~Sk~~ Albo $t = 2k\pi$ dla pewnego $k\in\mathbb{Z}$ albo $\exists_{k_0\in\mathbb{Z}}$ takie, że $t_0 = t - 2\pi k_0 \in (0, 2\pi)$.

$\exp(it_0) = \exp(it - 2\pi i k_0) = \exp(it) = 1$;

zatem $\exp\left(i\frac{t_0}{4}\right) \in \{1,-1,i,-i\}$ ← wszystkie pierwiastki 4-tego stopnia z 1.

$\overset{\shortparallel}{\cos\frac{t_0}{4} + i\sin\frac{t_0}{4}}$

wszystkie możliwości:

$\exp i\frac{t_0}{4}$	$\cos\frac{t_0}{4}$	$\sin\frac{t_0}{4}$
1	1	0
-1	-1	0
i	0	1
-i	0	-1

ale $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, a w tym przedziale sin i cos są dodatnie! W tabelce brak takiej możliwości! $\lightning$

to oznacza, że $\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ t = 2k\pi$, zatem $T = 2k\pi i$

<u>Twierdzenie</u>: 1) $\forall_{k\in\mathbb{Z}}$ liczba $2k\pi$ jest okresem funkcji sinus i cosinus,

2) jeżeli T jest okresem cosinusa lub sinusa, to $\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ T = 2k\pi$.

<u>Dowód</u>: 1) wprost z wzorów Eulera i tego, że $2k\pi i$ jest okresem exp.

2) Zauważmy najpierw, że jeżeli T jest okresem cosinusa, to jest też okresem sinusa (i odwrotnie). Mamy bowiem

$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall}\ \cos(z-\frac{\pi}{2}) = \sin z$ $\quad\left(\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z\right)$ ← z wzorów Eulera i $e^{i\pi/2} = i$

więc $\sin(z+T) = \cos(z+T-\frac{\pi}{2}) = \cos(z-\frac{\pi}{2}) = \sin z$.

Wykażemy teraz, że iT jest okresem exp, co na mocy poprzedniego twierdzenia oznacza, że $iT = 2k\pi i$ dla pewnej $k\in\mathbb{Z}$, zatem $T = 2k\pi$ dla pewnej $k\in\mathbb{Z}$.

$$\exp(z+iT) = \exp(i(-iz+T)) = \cos(-iz+T) + i\sin(-iz+T) =$$
$$= \cos(-iz) + i\sin(-iz) = \exp(i(-iz)) = \exp(z).$$

$\square$.

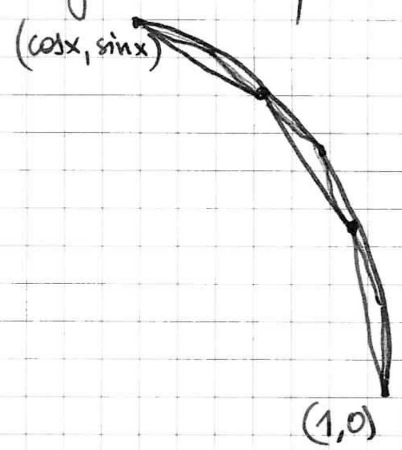
<u>Uwaga:</u> Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ punkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ leży na okręgu jednostkowym o środku w $(0,0)$, tj w zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

<u>Dowód:</u> „jedynka trygonometryczna".

<u>Twierdzenie:</u> Niech $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Długość łuku okręgu jednostkowego mierzona od punktu $(1,0)$ do $(\cos x, \sin x)$ wynosi x.

<u>Problem:</u> Co to jest długość łuku?
Umiemy obliczać długość odcinka (i dzięki temu – długości łamanych), ale z „prawdziwymi" krzywymi jest gorzej. To głęboki i poważny problem i jest kilka definicji, nie zawsze pokrywających się dla dostatecznie „paskudnych" krzywych. Okrąg na szczęście paskudny nie jest; nie wchodząc w szczegóły definicji zgodzimy się chyba, że

- jeżeli wpiszemy w ów łuk okręgu łamaną



i łamana ta będzie „dostatecznie drobna", tj długości odcinków łamanej będą dost. ~~bar~~ małe, to długość tej łamanej będzie dobrym przybliżeniem długości łuku. W szczególności, gdy w łuk wpiszemy łamaną L_n złożoną z n odcinków równej długości, to $\lim\limits_{n\to\infty} |L_n|$ = długość łuku od (1,0) do $(\cos x, \sin x)$.

długość

Dowód twierdzenia:

Zaczniemy od zidentyfikowania wierzchołków łamanej L_n. Niech $A_k = (\cos\frac{k}{n}x, \sin\frac{k}{n}x)$.
Oczywiście $A_0 = (1,0)$, $A_n = (\cos x, \sin x)$.

Punkty A_k, dla $k = \{0,1,\dots,n\}$, leżą na łuku okręgu w „naturalnym" porządku (tj punkt A_k leży między A_{k-1} a A_{k+1}), bo funkcja $\sin t$ jest rosnąca na $[0,\frac{\pi}{2}]$, więc A_{k+1} leży wyżej niż A_k, a A_{k-1} – niżej.
Stąd łamana L o wierzchołkach $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ jest wpisana w łuk okręgu $\overset{\frown}{A_0A_n}$.
Obliczmy teraz długości odcinków tej łamanej:

$$|A_kA_{k+1}| = \left|\left(\cos\tfrac{k+1}{n}x, \sin\tfrac{k+1}{n}x\right) - \left(\cos\tfrac{k}{n}x, \sin\tfrac{k}{n}x\right)\right| =$$
$$= \sqrt{\left(\cos\tfrac{k+1}{n}x - \cos\tfrac{k}{n}x\right)^2 + \left(\sin\tfrac{k+1}{n}x - \sin\tfrac{k}{n}x\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(-2\sin\tfrac{x}{2n}\sin\tfrac{k+1/2}{n}x\right)^2 + \left(2\sin\tfrac{x}{2n}\cos\tfrac{k+1/2}{n}x\right)^2} =$$
$$= \sqrt{4\sin^2\tfrac{x}{2n}\left(\sin^2\tfrac{k+1/2}{n}x + \cos^2\tfrac{k+1/2}{n}x\right)} = 2\sin\frac{x}{2n}$$

Wynik nie zależy od k, więc długości wszystkich odcinków łamanej L są takie same. Zatem $L = L_n$,
$$|L_n| = n\cdot 2\sin\frac{x}{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty}|L_n| = \lim_{n\to\infty} 2n\sin\frac{x}{2n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}}_{\to 1}\cdot x = x.$$

$\square$