Czy da się to jakoś opanować i wyszacować wszystkie składniki tej sumy? Zróbmy to porządnie:

① ciągi $\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne, a więc ograniczone:

$$\exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\quad |a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|<M,\quad |B_n|<M.$$

② ciąg (B_n) spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,k>n_0}\quad |B_n-B_k|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|=0$ i $\lim_{n\to\infty}A_n\cdot B_n=AB$, więc

$$\exists_{n_1>n_0}\ \forall_{n>n_0}\quad \sum_{k=n}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{8M},\qquad |A_nB_n-AB|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n\geq 2n_1$

$$\begin{aligned}
|AB-P_n| &\leq |AB-A_nB_n|+|A_nB_n-P_n|<\frac{\varepsilon}{2}+|A_nB_n-P_n|\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{|a_1||B_n-B_{n-1}|+|a_2||B_n-B_{n-2}|+\ldots+|a_{n_1}||B_n-B_{n-n_1}|}\\
&\quad+|a_{n_1+1}||B_n-B_{n-n_1-1}|+\ldots+|a_n||B_n-B_0|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{n_1}|)\frac{\varepsilon}{4M}+(|a_{n_1+1}|+\ldots+|a_n|)\cdot 2M\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\left(\sum_{k=n_1+1}^{\infty}|a_k|\right)\cdot 2M\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8M}\cdot 2M=\varepsilon.
\end{aligned}$$

tu mogę $|B_n-B_k|$ szacować z ②, bo $k=n-n_1>n_1>n_0$

a te różnice szacuję brutalnie: $|B_n-B_k|\leq|B_n|+|B_k|<2M$

Z dowolności ε widzimy, że $\lim_{n\to\infty}P_n=AB$.

A co, gdy szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są zbieżne, ale niekoniecznie bezwzględnie? Podany wcześniej przykład dowodzi, że nie mamy co liczyć na analogiczne twierdzenie do tw. Mertensa — – iloczyn Cauchy'ego dwóch takich szeregów może po prostu nie być zbieżny. No, ale jeżeli jest, to czy musi być zbieżny do AB?

<u>Twierdzenie</u> Cesàro

Ernesto Cesàro (1859 - 1906)
syn rolnika spod Neapolu
studia w Liège i Paryżu,
profesor uniw. w Palermo i Neapolu
teoria liczb, teoria szeregów, fizyka matematyczna i przede wszystkim geometria różniczkowa (geometria wewnętrzna, trójnóg Freneta).

Niech szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ będą zbieżne, (A_n) i (B_n) oznaczają odp. ich ~~sum~~ ciągi sum częściowych,
$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ – ich iloczyn Cauchy'ego,
$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_n$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{P_0 + P_1 + \ldots + P_n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = AB$$

średnia arytm. pierwszych $(n+1)$ sum częściowych szeregu $\sum p_n$, czyli tzw. <u>$(n+1)$-sza średnia Cesàro</u> tego szeregu.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ są zbieżne i również ich iloczyn Cauchy'ego $\sum p_n$ jest zbieżny, to zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n .$$

<u>Dowód wniosku</u>

~~Załóżmy, że~~ Skoro szereg $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ jest zbieżny (a więc zbieżny jest ciąg (P_n) jego sum częściowych), to możemy do obliczenia $\lim_{n\to\infty} \frac{P_0+P_1+\ldots+P_n}{n+1}$ użyć np. lematu Stolza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_0+P_1+\ldots+P_n}{n+1} \overset{S}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} P_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

$\parallel$ z tw. Cesàro istnieje z założenia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$\square$

Dowód tw. Cesàro

Jak w dowodzie tw. Mertensa otrzymujemy, że

$$P_k = a_0 B_k + a_1 B_{k-1} + a_2 B_{k-2} + \ldots + a_k B_0$$

czyli

$$P_0 = a_0 B_0$$
$$P_1 = a_0 B_1 + a_1 B_0$$
$$P_2 = a_0 B_2 + a_1 B_1 + a_2 B_0$$
$$\vdots$$
$$+ \quad P_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0$$

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n = B_0(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + B_1(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) + \ldots$$
$$+ B_{n-1}(a_0 + a_1) + B_n \cdot a_0$$
$$= A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + \ldots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$$

stąd

$$\left| \frac{P_0+P_1+\ldots+P_n}{n+1} - AB \right| = \left| \frac{(A_n B_0 - AB)}{n+1} + \frac{(A_{n-1}B_1 - AB)}{n+1} + \ldots + \frac{(A_0 B_n - AB)}{n+1} \right|$$
$$\le \frac{|A_n B_0 - AB|}{n+1} + \frac{|A_{n-1} B_1 - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_{n-k} B_k - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_0 B_n - AB|}{n+1}$$
$$= (*)$$

każdy z wyrazów oddzielnie jest dla dużych n mały - - licznik jest ograniczony (dlaczego?), a mianownik rośnie, ale liczba tych wyrazów rośnie wraz z n, więc trzeba uważać.

Dla dużych i, j A_i i B_j są bliskie A i B, więc A_iB_j będzie bliskie AB. Stąd środkowe wyrazy

$$\frac{|A_k B_{n-k} - AB|}{n+1}$$

(dla k i $(n-k)$ dużych) są małe również z tego powodu. Spróbujemy oszacować więc sumę dzieląc ją na 3 części – ogony lewy i prawy, w których korzystać będziemy z ograniczoności liczników, i środek, w którym wykorzystamy to, że $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$.

~~ciągi~~ Ustalmy $\varepsilon > 0$; wykażemy, że dla $n > m_0$ $(*) < \varepsilon$ (a więc $\lim_{n\to\infty} \frac{P_0 + \ldots + P_n}{n+1} = AB$).

① (A_n) i (B_n) są ograniczone: $\exists_M \forall_{n\in\mathbb{N}}$ $|A_n| < M$, $|B_n| < M$.

$(\Rightarrow |A| \le M, \ |B| \le M)$

② $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0}$ $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{4M}$, $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}$

③ wybierzmy teraz $m_0 \ge 2n_0$ takie, by $\frac{2M^2(n_0+1)}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$ dla $n > m_0$

np. $m_0 = \max\left(\frac{8M^2(n_0+1)}{\varepsilon}, 2n_0\right)$

Wtedy

$(\cdot)$ $\forall_{i,j}$ $|A_iB_j - AB| \le |A_i||B_j| + |A||B| < M^2 + M^2 = 2M^2$

$(\cdot\cdot)$ $\forall_{i,j > n_0}$ $|A_iB_j - AB| = |(A_i - A)B_j + A(B_j - B)| \le$

$\le |A_i - A||B_j| + |A||B_j - B|$

$\le \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$

~~(··)~~

Podzielmy teraz $(*)$ na ogony o długości n_0+1 i środek, o długości $n-2n_0-1$ (do tego musimy założyć, że $n>2n_0$ ale my bierzemy $n>m_0\geq 2n_0$).

$$(*)=\frac{|A_nB_0-AB|}{n+1}+\frac{|A_{n-1}B_1-AB|}{n+1}+\ldots+\frac{|A_{n-n_0}B_{n_0}-AB|}{n+1} \qquad \text{lewy ogon}$$

$$+\frac{|A_{n-n_0-1}B_{n_0+1}-AB|}{n+1}+\ldots+\frac{|A_{n_0+1}B_{n-n_0-1}-AB|}{n+1} \qquad \text{środek}$$

$$+\frac{|A_{n_0}B_{n-n_0}-AB|}{n+1}+\ldots+\frac{|A_0B_n-AB|}{n+1} \qquad \text{prawy ogon}$$

W lewym ogonie każdy z wyrazów jest $\leq \frac{2M^2}{n+1}$, jest ich n_0+1, więc

$$LO\leq\frac{n_0+1}{n+1}\cdot 2M^2<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{gdy } n>m_0$$

podobnie $PO\leq\frac{n_0+1}{n+1}\cdot 2M^2<\frac{\varepsilon}{4}$,

zaś w środku każdy wyraz jest mniejszy niż $\frac{\varepsilon/2}{n+1}$, a jest ich $n-2n_0-1$, więc

$$ŚR\leq\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n-2n_0-1}{n+1}=\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{2n_0+2}{n+1}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$$

a zatem ostatecznie

$$(*)=LO+ŚR+PO<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon. \qquad (\text{o ile tylko } n>m_0)$$

□

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej

Twierdzenie: Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

(1) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest bezwzględnie zbieżny

(2) ciąg $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny

i $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Uwaga: Gdy w szeregu $\sum_{n=0} a_n z^n$ położymy $z=0$, dla $n=0$ otrzymamy $a_0 0^0$ ← wyrażenie nieokreślone.
W tej konkretnej sytuacji, by nie komplikować zapisu, umawiamy się, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Big|_{z=0} = a_0$
(zgodne z intuicją, $\sum_{n=0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$)

Uwaga: Dla $z=1$ otrzymujemy, że $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e$.

Definicja: tę wspólną wartość sumy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ i granicy ciągu $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ nazywamy $\exp(z)$.

Dowód twierdzenia:

(1) Badamy zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$.
Dla ustalonego $z \in \mathbb{C}$ użyjemy kryterium d'Alemberta.

$$a_n = \frac{|z|^n}{n!}, \text{ to } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{\cancel{|z|^{n+1}}^{|z|}}{\cancel{|z|^n}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{n+1}} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

a więc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ jest zbieżny.

(2) Oznaczmy $b_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, $S(z) = \cancel{\exp} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Wiemy, że $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$; wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} b_n(z) = S(z)$

Ustalmy $\varepsilon>0$; wykażemy, że dddn $|b_n(z)-S(z)|<\varepsilon$.

$$|b_n(z)-S(z)| = |b_n(z)-S_m(z)+S_m(z)-S(z)|$$
$$\leq |b_n(z)-S_m(z)| + |S_m(z)-S(z)|.$$

$\lim_{m\to\infty} S_m(z)=S(z)$, więc $\exists_{n_0} \forall_{m>n_0} \; |S_m(z)-S(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Teraz musimy oszacować $|b_n(z)-S_m(z)|$.

Ustalmy $m>n_0$; teraz wykażemy, że dddn $|b_n(z)-S_m(z)|$ jest $<\frac{2}{3}\varepsilon$.

$$b_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!\,n^k}z^k$$

dwumian Newtona

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Załóżmy, że $n>m$, wtedy

$$|b_n(z)-S_m(z)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| =$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-1\right]+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{m}\frac{|z|^k}{k!}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-1\right| + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right| = (*)$$

Dla $0\leq k\leq m$ $\quad 1\geq\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq\left(1-\frac{m}{n}\right)^m \overset{\text{n.B.}}{\geq} 1-\frac{m^2}{n}$,

więc $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-1\right| = 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leq 1-\left(1-\frac{m^2}{n}\right)=\frac{m^2}{n}$

$$(*)\leq\sum_{k=0}^{m}\frac{|z|^k}{k!}\cdot\frac{m^2}{n}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!} = \frac{m^2}{n}S_m(|z|)+\underbrace{S_n(|z|)-S_m(|z|)}_{<\frac{\varepsilon}{3},\text{ o ile } n,m \text{ dost. duże}}$$

$\downarrow$ przy ustalonym m i $n\to\infty$

0

z war. Cauchy'ego $\exists_{n_1>n_0}$ t.ż. $\forall_{n,m>n_1} \; |S_n(|z|)-S_m(|z|)|<\frac{\varepsilon}{3}$

Wybieramy $m>n_1$ i bierzemy $n>m$ tak duże, by $\frac{m^2 S_m(|z|)}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$.

tj $n>m=n_2>n_1$

Stąd $|b_n(z) - S(z)| < \varepsilon$, o ile n dost. duże,
a więc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(z) = S(z)$

Twierdzenie (o własnościach funkcji exp w dziedzinie zespolonej).

① $\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

② $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \exp(z) \neq 0 \; ; \quad \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

③ $\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) \; ; \quad |\exp(ix)| = 1$

④ $\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$

⑤ jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(z_n) = \exp(z)$ (ciągłość)

⑥ jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ i $\forall_n\, z_n \neq 0$, to $\forall_{w\in\mathbb{C}} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\exp(z_n+w) - \exp(w)}{z_n} = \exp(w)$

(różniczkowalność)

Dowód:

① skorzystamy z tw Mertensa (albo i wcześniejszego twierdzenia o zbieżności iloczynów dwóch szeregów bezwzgl. zbieżnych)

$$\exp(z)\exp(w) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right)}_{\text{szeregi bezwzgl. zbieżne}} \overset{\text{tw. Mertensa}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \overset{(*)}{=} \text{, gdzie}$$

$$p_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{z^l}{l!}\cdot\frac{w^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!}\binom{k}{l} z^l w^{k-l} = \frac{1}{k!}(z+w)^k$$

$$(*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = \exp(z+w).$$

② Wiemy, że $\exp(1) = e \neq 0$; ~~exp(z) = exp~~ $\exp(0) = 1 \neq 0$
Załóżmy, że $\exists_{z_0} \exp(z_0) = 0$, wtedy $1 = \exp(0) = \underbrace{\exp(z_0)}_{=0}\exp(-z_0)$ ↯

③ Zauważmy najpierw, że jeżeli $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, to $\overline{z_n} \to \overline{z}$ (bo z def. zbieżności w $\mathbb{C}$ $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$, więc $\overline{z_n} = \operatorname{Re} z_n - i \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z = \overline{z}$).

$$\overline{\exp(ix)} = \overline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\overline{\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{ix}{n}\right)^n = \exp(-ix)$$

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1.$$

④
$$|\exp(z)| = |\exp(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)| = |\exp(\operatorname{Re}(z))|\underbrace{|\exp(i\operatorname{Im} z)|}_{=1} =$$
$$= |\underset{>0}{\exp(\operatorname{Re} z)}| = \exp(\operatorname{Re} z).$$

⑥ $$|\exp(z)-1-z| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-1-z\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right| = \left|z^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}\right|$$

Jeżeli teraz $|z|\le 1$, to $|\exp(z)-1-z| \le |z|^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{(k+2)!} \le$
$$\le |z|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!} = |z|^2(e-2)$$

Jeżeli więc $z_n \to 0$, $z_n \ne 0$, to oddd n $|z_n|\le 1$, więc
$$0 \le \left|\frac{\exp(z_n)-1}{z_n}-1\right| = \left|\frac{\exp(z_n)-1-z_n}{z_n}\right| \le \frac{|z_n|^2(e-2)}{|z_n|} = |z_n|(e-2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

i z tw. o 3 ciągach $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(z_n)-1}{z_n} = 1$.

⑤ skorzystamy z ⑥: niech $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, wtedy $z_n - z \to 0$.

$$0 \le |\exp(z_n)-\exp(z)| = |\exp(z)|\,|\exp(z_n-z)-1| =$$
$$= |\exp(z)|\underbrace{\left|\frac{\exp(z_n-z)-1}{z_n-z}\right|}_{\text{z ⑥ } \xrightarrow{n\to\infty} 1}\underbrace{|z_n-z|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

i z tw. o 3 ciągach
$$\exp(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(z).$$

Wykażemy teraz, że funkcja exp jest jednoznacznie wyznaczona przez własności ① i ⑥.

<u>Twierdzenie</u> Niech funkcja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełnia warunki

① $\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad f(z+w) = f(z) f(w)$

② jeżeli $z_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)-1}{z_n} = 1$.
i $\forall_n \; z_n \neq 0$

Wówczas $\forall_{z\in\mathbb{C}} \; f(z) = \exp(z)$.

Do dowodu potrzebujemy wersji lematu o ciągach szybko zbieżnych do 1:

<u>Lemat</u>: Jeżeli (a_n) jest ciągiem liczb zespolonych spełniającym $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1$

<u>Dowód</u>:

$$0 \leq |(1+a_n)^n - 1| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_n^k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |a_n|^k = (1+|a_n|)^n - 1 = (*)$$

$(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych; $n|a_n| = |na_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |0| = 0$

zatem do $(1+|a_n|)^n$ możemy zastosować znany nam już, rzeczywisty lemat o ciągach szybko zbieżnych:

$$\lim_{n\to\infty} (*) = \lim_{n\to\infty} (1+|a_n|)^n - 1 \underset{\text{lemat o ciągach ...}}{=} 1 - 1 = 0$$

i z tw. o 3 ciągach $(1+a_n)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

<u>Wniosek</u>: Jeżeli $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}+a_n\right)^n = \exp(z)$.

<u>Dowód</u>: $$\left(1+\frac{z}{n}+a_n\right)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\frac{z}{n}+a_n}{1+\frac{z}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \left(1+\frac{a_n}{1+\frac{z}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \Big(1+\underbrace{\frac{na_n}{n+z}}_{b_n}\Big)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n (1+b_n)^n$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{\to 1}{\frac{n}{n+z}} \cdot \overset{\to 0}{n a_n} = 0$,

zatem $(1+b_n)^n \to 1$, i

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}+a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \cdot (1+b_n)^n = \exp(z)\cdot 1 = \exp(z).$$

Dowód twierdzenia

Ustalmy $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$ i oznaczmy $a_n = \dfrac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}} - 1$.

Z własności ② mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z def. ciągu (a_n) otrzymujemy $f(\frac{z}{n}) = 1+\frac{z}{n}(a_n+1) =$

$$= 1+\frac{z}{n} + \overbrace{a_n\frac{z}{n}}^{=b_n},$$

a korzystając z ① dostajemy

$$f(z) = f(\tfrac{z}{n})\cdot f(\tfrac{z}{n})\cdots f(\tfrac{z}{n}) = \left(f(\tfrac{z}{n})\right)^n = \left(1+\tfrac{z}{n}+b_n\right)^n$$

Wiemy więc, że ciąg $(1+\frac{z}{n}+b_n)^n$ jest ciągiem stałym; $nb_n = z a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, więc z wniosku $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n}+b_n)^n = \exp(z)$, stąd $f(z)=\exp(z)$.

~~Pozostaje przypadek $z=0$, wtedy $f(0)=f(0+0)=f(0)^2$ $\Rightarrow f(0)=0$ lub $f(0)=1$, ale $f(0)=0 \Rightarrow \forall_z f(z)=f(z+0) = f(z)f(0)=0$~~

Pozostaje $z=0$. $\forall_{w\in\mathbb{C}}\ f(w)=f(w+0)=f(w)f(0)$

$\Rightarrow \forall_w f(w)=0$ lub $f(0)=1=\exp(0)$

gdyby $\forall_{w\in\mathbb{C}} f(w)=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(z_n)-1}{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{z_n}\right) \not\to 1$ gdy $z_n\to 0$

(np gdy $z_n=\frac{1}{n}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{z_n}\right) = -\infty$).

to pozostawia jedynie możliwość $f(0)=1=\exp(0)$.