<u>Twierdzenie (Riemann)</u>: Jeżeli $\sum a_n$ jest warunkowo zbieżny, $\forall_n a_n \in \mathbb{R}$, to $\forall_{r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}} \exists_{\substack{\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \text{bijekcja}}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$.

Innymi słowy, przestawianie wyrazów w szeregu warunkowo zbieżnym nie tylko może zaburzyć wartość sumy, ale możemy dostać szereg zbieżny do dowolnie wybranej liczby rzeczywistej, albo i rozbieżny.

<u>Szkic dowodu</u>: Zauważmy, że $\forall_{x \in \mathbb{R}}$ $x = \max(x,0) + \min(x,0)$.
$|x| = \max(x,0) - \min(x,0)$

Stąd
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} [\max(a_n,0) + \min(x,0)].$$

Gdyby któryś z szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n,0) = \sum_{n: a_n > 0} |a_n|$

i $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n,0) = -\sum_{n: a_n < 0} |a_n|$

był zbieżny, to ~~był~~ zbieżny byłby i drugi.

Niech np $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n,0) < \infty$, wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n,0) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \max(a_n,0)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n,0)$$
← różnica 2 szeregów zbieżnych jest zbieżna.

wolno, bo oba szeregi po prawej stronie są zbieżne.

Albo więc oba są zbieżne, albo oba rozbieżne.

~~(W tym~~ Gdyby oba były zbieżne, to
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} [\max(a_n,0) - \min(a_n,0)] = \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n,0) - \sum_{k=1}^{\infty} \min(a_n,0)$$
byłby zbieżny — a nie jest. Stąd
$$\sum_{n: a_n > 0} a_n = +\infty, \quad \sum_{n: a_n < 0} a_n = -\infty.$$

Ponumerujmy kolejne dodatnie wyrazy szeregu $\sum a_n$ i oznaczmy je $(b_k)$, a ujemne $(c_k)$. Zauważmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$ i $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$

Jak dostać sumę szeregu $\sum a_{\sigma(n)} = 17$?

~~Proste~~ Proste

Twierdzenie: Jeżeli $(b_n)$ jest ograniczony, a $\sum a_n$ jest bezwzgl. zbieżny, to $\sum a_n b_n$ też jest bezwzgl. zbieżny.

Uwaga: ~~Jeżeli~~ Żaden szereg $\sum a_n$ warunkowo zbieżny nie spełnia tezy tego twierdzenia: wystarczy wziąć $b_n = \operatorname{sgn} a_n$, $\forall_n |b_n| \le 1$, wtedy $\sum a_n b_n = \sum |a_n| = +\infty$.

Dowód: Niech $\forall_n \; |b_n| < M$, wtedy $\forall_n \; |a_n b_n| \le M|a_n|$ i z kryt. porównawczego i zbieżności $\sum |a_n|$ mamy zbieżność $\sum |a_n b_n|$.

Przekszt. Abela: będziemy badać, jak wyżej, szeregi postaci $\sum a_n b_n$, w sytuacji, w której ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$, ew. szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ mają dodatkowe własności.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

podstawy teorii grup, rozwiązalność r-ń 5-go stopnia, funkcje eliptyczne, teoria szeregów.

Trik, zwany przekształceniem Abela, pozwala nieco inaczej zapisać sumy częściowe szeregu $\sum a_n b_n$:

Niech $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= \underbrace{a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k b_k} - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k =$$

pogrupujmy wg. $A_k$

$$= \cancel{a_1 b_1} + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$

**Wniosek** (twierdzenie „o sumowaniu przez części")

Jeżeli $1^\circ$ zbieżny jest szereg $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$

oraz $2^\circ$ zbieżny jest ciąg $(A_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

to zbieżny jest szereg $\sum a_n b_n$

**Dowód**: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_n(b_n - b_{n+1})}_{\text{zbieżny z } 1^\circ} + \underbrace{A_n b_n}_{\text{zbieżny z } 2^\circ}$.

**Twierdzenie Abela**

Niech $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Jeżeli $(\cdot)$ ciąg $(A_n)$ jest ograniczony

oraz $(\cdot\cdot)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < \infty$ i $b_n \to 0$

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

**Dowód**: Sprawdzimy punkty $1^\circ$ i $2^\circ$ z tw. o sumowaniu przez części:

$1^\circ$ szereg $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny (mnożymy wyrazy szeregu bezwzgl. zbieżnego $\sum(b_n - b_{n+1})$ przez ciąg ograniczony $(A_n)$)

$2^\circ$ skoro $(A_n)$ ograniczony, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to $A_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

**Kryterium Abela**

Niech $(a_n) \subset \mathbb{C}$, $\underline{(b_n) \subset \mathbb{R}}$. Jeżeli

a) szereg $\sum a_n$ jest zbieżny

oraz b) ciąg $(b_n)$ jest monotoniczny i ograniczony

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

**Dowód**:

Ciąg $(b_n)$ jest, na mocy b), zbieżny do granicy $b$.

Oznaczmy $\tilde{b}_n = b_n - b$. Ciąg $(\tilde{b}_n)$ jest monotoniczny i dąży do $0$.

Zbadajmy teraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{b}_n-\tilde{b}_{n+1})$.

$$\sum_{k=1}^{n}(\tilde{b}_k-\tilde{b}_{k+1}) = \tilde{b}_1-\tilde{b}_2+\tilde{b}_2-\tilde{b}_3+\ldots+\tilde{b}_n-\tilde{b}_{n+1} = \tilde{b}_1-\tilde{b}_{n+1} =$$
$$= b_1-b-(b_{n+1}-b) = b_1-b_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_1-b$$

jest to więc szereg zbieżny. Z monotoniczności $(\tilde{b}_n)$ wiemy, że jego wyrazy mają ustalony znak – dodatni, gdy $(\tilde{b}_n)$ malejący, ujemny – gdy ~~rosnący~~ rosnący; to oznacza, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny.

$\sum|\tilde{b}_k-\tilde{b}_{k+1}| < \infty$.

Stąd szereg $\sum a_n\tilde{b}_n$ spełnia założenia tw. Abela $\Rightarrow$ jest zbieżny
($A_n$ ograniczony, bo zbieżny).

mamy też
$$\sum a_nb_n = \sum a_n(\tilde{b}_n+b) = \underbrace{\sum a_n\tilde{b}_n}_{\text{zbieżny z tw. Abela}} + b\underbrace{\sum a_n}_{\text{zbieżny z a)}}.$$
$\square$

Kryterium Dirichleta:

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Niech $(a_n)\subset\mathbb{C}$, $(b_n)\subset\mathbb{R}$. Jeżeli

a) ciąg $(A_n)$ jest ograniczony

b) ciąg $(b_n)$ jest malejący i dąży do 0

to $\sum a_nb_n$ jest zbieżny.

Dowód: Spełnione są założenia tw. Abela, gdyż
$$\sum_{k=1}^{n}|b_k-b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1}) = b_1-b_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} b_1.$$

(reszta założeń – oczywista).

Wniosek: Kryterium Leibniza

Jeżeli $(b_n)$ monotonicznie dąży do 0, to $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ jest zbieżny

Dowód: Bez straty ogólności możemy założyć, że $(b_n)$ jest ~~malejący~~ nierosnący; $a_n=(-1)^n$, więc $A_n=\begin{cases}-1 & 2\nmid n\\ 0 & 2\mid n\end{cases}$ i spełnione są założenia kryterium Dirichleta. $(b_n\geq 0) \leftarrow$ bo $(b_n)$ nierosnący i $\to 0$.

## ~~Twierdz~~ Inny dowód kryterium Leibniza (szkic)

Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$ ; $Z_n = S_{2n}$ ; $W_n = S_{2n+1}$

$Z_{n+1} - Z_n = S_{2n+2} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \le 0$, $\leftarrow$ $(Z_n)$ nierosnący

analogicznie $W_{n+1} - W_n \ge 0$ $\leftarrow$ $(W_n)$ niemalejący

$\forall_n \; W_n - Z_n = -b_{2n+1} \le 0$

$$\Downarrow$$

$\forall_n \; W_1 \le W_n \le Z_n \le Z_1$ – stąd $(W_n)$ ogr. z góry,
$(Z_n)$ ogr. z dołu

$\Rightarrow$ oba ciągi $(W_n)$ i $(Z_n)$ są zbieżne,

ale $W_n - Z_n = -b_{2n+1} \to 0$ $\Rightarrow$ ich granice są równe

z tw. o scalaniu $(S_n)$ jest zbieżny.

Przykłady:

1. Zbieżność szeregu anharmonicznego
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$ maleje do 0,
więc szereg spełnia warunki kryt. Leibniza.

2. Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ jest zbieżny (znów kryt. Leibniza)

3. Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ i $z \neq 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny

Dowód: kryt. Dirichleta: $a_n = z^n$, $b_n = \frac{1}{n}$.

$(b_n)$ maleje do 0,

$$|A_n| = |a_1 + \ldots + a_n| = |z + z^2 + \ldots + z^n| = \left| z \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \le \underbrace{|z|}_{=1} \cdot \frac{|1| + |z|^n}{|1 - z|} \le \frac{2}{|1-z|}$$

Oczywiście $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny tylko warunkowo.

# Mnożenie szeregów

Rozstrzygnęliśmy już, jak wygląda sprawa łączności dodawania dla sum nieskończonych (wolno grupować wyrazy, o ile szereg jest zbieżny) i przemienności (wolno przestawiać wyrazy, gdy szereg jest bezwzględnie zbieżny).

A co z rozdzielnością mnożenia względem dodawania?

Gdy mnożymy dwie skończone sumy

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

otrzymujemy sumę iloczynów $a_ib_j$, gdzie $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$. Możemy je wypisać w jakiejkolwiek kolejności, bo dodawanie w przypadku sum skończonych jest przemienne.

A dla szeregów? Czy $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_ib_j$ ?

Co powinny spełniać szeregi $\sum a_i$, $\sum b_i$ ?

w jakiejś ustalonej kolejności (a może w dowolnej?)

Jak wybrać kolejność?

Najpierw ustalimy „ulubioną" kolejność iloczynów $a_ib_j$

Def: Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$, gdzie $p_n=\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & a_4b_0 \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & a_4b_1 \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & a_4b_2 \\
b_3 & a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_4b_3 \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Dlaczego taki wybór?

Wyobraźmy sobie, że mnożymy nie 2 dowolne sumy długości $(n+1)$, ale 2 wielomiany stopnia $n$:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n) =$$
$$= a_0b_0 + (a_1b_0+a_0b_1)x + (a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}\right)x^{n+1} + \ldots = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n + \text{(dalej już nie tak ładnie)}.$$

Szeregi podobne do zbadanego przez nas $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ lub ogólniej $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ odgrywają w analizie matematycznej niezwykle ważną rolę, o czym niebawem się Państwo przekonają. Chcielibyśmy móc je mnożyć jak „nieskończone wielomiany" – – a więc $(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots) = p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots$

Czy to ma sens, to się wyjaśni niebawem, jest to w każdym razie powód do wybrania takiej, a nie innej kolejności iloczynów $(a_ib_j)$ (i ich pogrupowania).

Twierdzenie:

Niech szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą bezwzględnie zbieżne, a wyrazami szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ niech będą wszystkie iloczyny $a_i \cdot b_j$, ustawione w dowolnej kolejności.

Wówczas szereg $\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny; jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A\cdot B$.

Czyli w przypadku, gdy $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są bezwzgl. zbieżne, możemy iloczyny $a_ib_j$ ustawić w dowolnej kolejności; a suma szeregu iloczynów będzie taka, jak trzeba.

Zanim udowodnimy to twierdzenie, pokażę Państwu przykład, pochodzący od Cauchy'ego, wskazujący, że bez bezwzględnej zbieżności szeregów wyjściowych możemy wpaść w kłopoty:

Przykład: Niech $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $a_0 = b_0 = 0$. Z kryt. Leibniza wiemy, że szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są (warunkowo) zbieżne. Z drugiej strony

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{i}} \cdot \frac{(-1)^{n-i-1}}{\sqrt{n-i}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{i}\sqrt{n-i}} =$$

$$= (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

zauważmy, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $i(n-i) \leq (n-1)^2$, więc

$$|p_n| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2}} = \sum_{i=1}^{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} = (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} = 1$$

a zatem szereg $\sum p_n$ jest rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).

Dowód twierdzenia: Niech $C_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|$. Jest to oczywiście ciąg niemalejący; by wykazać, że jest zbieżny (a więc że $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ jest bezwzgl. zbieżny), wystarczy udowodnić, że $(C_n)$ jest ograniczony z góry.

Każdy z wyrazów $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jest postaci $a_i b_j$, dla pewnych $i, j$. Niech $r$ będzie największym z indeksów przy $a$ występującym w iloczynach $c_1, \ldots, c_n$, $s$ – największym indeksem przy $b$. Mamy wówczas

$$C_n = |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| \leq \left(\sum_{k=0}^{r} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{s} |b_l|\right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right).$$

czyli $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ogr. z góry. Tym samym udowodniliśmy, że

$\sum c_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a w szczególności – że wartość jego sumy nie zależy od kolejności wyrazów.

Aby zatem obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ możemy ustawić sobie wyrazy $\sum c_n$ w dogodnej dla nas kolejności.

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | $a_0b_0$ | $a_1b_0$ | $a_2b_0$ | $a_3b_0$ | |
| $b_1$ | $a_0b_1 \to$ | $a_1b_1$ | $a_2b_1$ | $a_3b_1$ | |
| $b_2$ | $a_0b_2 \to$ | $a_1b_2 \to$ | $a_2b_2$ | $a_3b_2$ | |
| $b_3$ | $a_0b_3 \to$ | $a_1b_3 \to$ | $a_2b_3 \to$ | $a_3b_3$ | |
| $\vdots$ | | | | | |

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \overset{c_0}{a_0b_0} + \overset{c_1}{a_0b_1} + \overset{c_2}{a_1b_1} + \overset{c_3}{a_1b_0}$$
$$+ \overset{c_4}{a_0b_2} + \overset{c_5}{a_1b_2} + \overset{c_6}{a_2b_2} + \overset{c_7}{a_2b_1} + \overset{c_8}{a_2b_0} +$$
$$+ \dots$$

Dlaczego tak? Bo jeżeli $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, to

$$A_0B_0 = a_0b_0 = c_0$$
$$A_1B_1 = (a_0+a_1)(b_0+b_1) = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3$$
$$\vdots$$
$$A_nB_n = c_0 + c_1 + \dots + c_{n^2+2n}$$

Jeżeli więc $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, to $S_{n^2+2n} = A_nB_n$ i $\lim_{n^2+2n} S_{n^2+2n} =$

$= \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = AB$, a więc podciąg $(S_{n^2+2n})$ ciągu $(S_n)$ zbiega do $AB$. No, ale ciąg $(S_n)$ jest zbieżny (bo $\sum c_n$ jest zbieżny), więc $\lim_{n\to\infty} S_n = A \cdot B$.

Gdy ograniczymy się do iloczynu Cauchy'ego szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ (a nie - dowolnego przestawienia iloczynów $a_i b_j$), możemy nieco osłabić wymagania względem szeregów $\sum a_n, \sum b_n$:

Twierdzenie (Mertens)

Niech szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ będą zbieżne, w tym co najmniej jeden - bezwzględnie. Wtedy iloczyn Cauchy'ego $\sum p_n$ tych szeregów jest zbieżny i $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_{A} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{B}$.

Franz (Franciszek) Mertens (1840-1927). Ur. w Środzie Wlkp. Studia w Berlinie u Weierstrassa, Kroneckera i Kummera, od 1865 wykładowca UJ, od 1884 - na politechnice w Grazu i na uniw. w Wiedniu (tam uczył m.in. Schrödingera). Osiągnięcia w analitycznej teorii liczb.

Dowód: Oznaczmy sumy częściowe szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$ i $\sum p_n$ odpowiednio przez $A_n$, $B_n$ i $P_n$. Załóżmy też, że to $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Chcemy wykazać, że $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$.

$$P_n = \sum_{i+j\leq n} a_i b_j = a_0(b_0+b_1+\ldots+b_n) + a_1(b_0+\ldots+b_{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(b_0+b_1) + a_n b_0 =$$
$$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0,$$

stąd $A_n B_n - P_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) B_n - P_n =$

$$= a_0 B_n + a_1 B_n + \ldots + a_n B_n - a_0 B_n - a_1 B_{n-1} - \ldots - a_n B_0$$
$$= \underbrace{a_1(B_n - B_{n-1}) + a_2(B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(B_n - B_1) + a_n(B_n - B_0)}$$

Chcemy wykazać, że ta suma jest mała.
Jeżeli $n$ jest duże, to początkowe jej wyrazy są małe, bo $(B_k)$ jest zbieżny, więc $B_n - B_{n-1}$, $B_n - B_{n-2}$ itp są małe dla dost. dużych $n$, a $a_1, a_2$ są ograniczone.
Dla odmiany jej końcowe wyrazy są małe, bo wprawdzie $B_n - B_1$ czy $B_n - B_0$ małe być nie muszą, ale $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$.