Lemat (o ciągach szybko zbieżnych do 0)
Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych.
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1$

Dowód.

Zauważmy najpierw, że z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i ddd n $|a_n| < \frac{1}{2}$.

Wiemy bowiem, że $\underset{n_0}{\exists}\ \underset{n>n_0}{\forall}\ |na_n| < \frac{1}{2}$ (z def granicy ciągu (na_n), z $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

$$\Updownarrow$$

$$\underset{n_0}{\exists}\ \underset{n>n_0}{\forall}\ -\frac{1}{2} \le \underbrace{-\frac{1}{2n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} < a_n < \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \le \frac{1}{2}$$

i z tw. o 3 ciągach $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
a dla $n > n_0$ $|a_n| < \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}$.

Skoro dla $n > n_0$ $a_n \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, to $1 + a_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

Oszacujemy $(1+a_n)^n$ z góry i z dołu, korzystając z nier. Bernoulliego.

Z dołu łatwo:
$$(1+a_n)^n \geq 1 + na_n$$
o ile tylko $a_n > -1$, ale gdy $n > n_0$, wiemy, że $a_n > -\frac{1}{2} > -1$.

Z góry:

$$\frac{1}{(1+a_n)^n} = \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \geq 1 - \frac{na_n}{1+a_n}$$

o ile tylko $-\frac{a_n}{1+a_n} > -1$,
ale dla $n > n_0$ $\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| < \frac{1/2}{1/2} = 1$, więc $-\frac{a_n}{1+a_n} > -1$.

Mamy więc dla $n > n_0$

$$1 + na_n \leq (1+a_n)^n \leq \frac{1}{1 - \frac{na_n}{1+a_n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+na_n) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{na_n}{1+a_n}} = \frac{1}{1-\frac{0}{1}} = 1$$

więc z tw. o 3 ciągach $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^n = 1$

<u>Twierdzenie</u>: (o def. i własnościach funkcji wykładniczej).

Ciąg $\{ a_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ jest

⓪ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbieżny do granicy, którą tradycyjnie oznacza się $\exp(x)$, ale dla krótszego zapisu w dalszej części tw. oznaczana jest $a(x)$

① $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; a(x) > 0$; $a(0) = 1$

② $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \; a(x+y) = a(x)a(y)$ (własność grupowa)

③ $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; a(x) \geq 1+x$

④ $\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \; x > y \Rightarrow a(x) > a(y)$ (monotoniczność)

⑤ $\forall_{x<1} \; a(x) \leq \frac{1}{1-x}$

⑥ $\forall_{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \; |a(x) - 1 - x| \leq 2x^2$

⑦ Jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, to $\lim_{n\to\infty} a(x_n) = a(x)$ (ciągłość)

⑧ Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; b_n \neq 0$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a(x+b_n) - a(x)}{b_n} = a(x)$

(różniczkowalność)

Dowód

⓪ Wykażemy najpierw, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ ciąg $(a_n(x))$ jest niemalejący (dla dost. dużych n).

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n(x+n+1)}{(n+1)(x+n)}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+x}{n}\left(\frac{nx+n^2+n}{nx+n^2+n+x}\right)^{n+1} = \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{(n+1)(x+n)}\right)^{n+1} = (*)$$

do oszacowania ostatniego nawiasu chcemy użyć nier. Bernoulliego. Czy wolno? Powinniśmy mieć

$-\frac{x}{(n+1)(x+n)} > -1$, czyli $\frac{x}{(n+1)(x+n)} < 1$. Jeżeli jednak weźmiemy dost. duże n, np $n > 2|x|$, to $\left|\frac{x}{x+n}\right| < 1$, więc $\left|\frac{x}{(n+1)(x+n)}\right| < \frac{1}{n+1}$, w szczególności spełniona jest ta nierówność.

Liczymy dalej:
$$(*) \geqslant \frac{n+x}{n}\left(1-\frac{x}{x+n}\right) = \frac{n+x}{n}\cdot\frac{n}{x+n} = 1.$$

A więc ciąg $(a_n(x))$ jest, przynajmniej dla $n > 2|x|$, niemalejący. Czy jest ograniczony z góry?

Ograniczoność łatwo zauważyć, gdy $x \leq 0$, wtedy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1^n = 1$$

o ile tylko $n > |x|$ (żeby liczba $1+\frac{x}{n}$ była dodatnia).

Wiemy zatem, że $(a_n(x))$ jest, dla $x \leq 0$, niemalejący i ograniczony z góry, a więc zbieżny (do $a(x)$).
Granica $a(x)$ jest >0, bo $(a_n(x))$ jest niemalejący i przyjmuje wartości dodatnie.
Zbieżność $(a_n(x))$ dla $x > 0$ wykażemy korzystając z pewnej sztuczki.

Wiemy, że $\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right) = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$. Mamy stąd,

$$a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)}.$$

Z lematu o ciągach szybko zbieżnych do zera widzimy natychmiast, że $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$, niezależnie od wartości x. Jeżeli $x>0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n(-x) = a(-x)$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{a_n(-x)} = \frac{1}{a(-x)};$$

w szczególności granica ciągu $(a_n(x))$ istnieje i jest niezerowa, poza tym

$$a(x)\,a(-x) = 1.$$

Dla $x=0$: oczywiście $\forall_n\ a_n(0) = 1$, więc $a(0)=1$.

② $a(x)a(y) = a(x+y)$.

Wykażemy, że $\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = 1$.

$$\frac{a(x)a(y)}{a(x+y)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^n \overset{(*)}{=}, \quad \text{gdzie } \alpha_n = \frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}.$$

Łatwo zauważyć, że $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = 0$, skąd, na mocy lematu o ciągach ... $(*) = 1$.

③ $a(x) \geqslant 1+x$.

Niech $n > |x|$, wtedy do $a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ możemy przyłożyć nier. Bernoulliego (bo $\frac{x}{n} > -1$). Otrzymujemy

$a_n(x) \geqslant 1+x$, a że $(a_n(x))$ jest niemalejący, to

$a(x) \geqslant a_n(x) \geqslant 1+x$.

(w rzeczywistości nawet bez monotoniczności, na mocy tw. o szacowaniu z $a_n(x) \geqslant 1+x$ wynika $a(x) \geqslant 1+x$).

④ $x>y \Rightarrow a(x)>a(y)$

Załóżmy, że $x>y$.

$$a(x)-a(y) \overset{②}{=} a(y)a(x-y)-a(y) = a(y)[a(x-y)-1].$$

Mamy $a(x-y) \geqslant 1+(x-y)$, więc

$a(y)[a(x-y)-1] \geqslant a(y)(x-y) > 0$, bo zarówno $a(y)$, jak i $(x-y)$ są dodatnie. Skoro $a(x)-a(y)>0$, to $a(x)>a(y)$.

⑤ $\forall_{x<1} \quad a(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.

Wiemy, że $a(-x) \geqslant 1-x$, a dla $x<1$ prawa strona (a więc obie) nierówności jest dodatnia. Stąd

$$a(x) = \frac{1}{a(-x)} \geqslant \frac{1}{1-x}.$$

⑥ $\forall_{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \quad |a(x)-1-x| \leqslant 2|x|^2$

Skoro $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, to możemy korzystać z nierówności ⑤ (no i z ③, bo ta zachodzi dla dowolnych x). Mamy

$$0 \underset{③}{\leqslant} a(x)-1-x \underset{⑤}{\leqslant} \frac{1}{1-x}-1-x = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \underset{\text{bo } |x|<\frac{1}{2}}{\leqslant} 2|x|^2$$

⑦ $x_n \to x$, to $a(x_n) \to a(x)$.

niepotrzebny, bo $a(x)>0$

$$0 \leqslant |a(x_n)-a(x)| \overset{②}{=} |a(x)||a(x_n-x)-1| = (*)$$

Jeżeli $x_n \to x$, to dla dostatecznie dużych n $|x_n-x|<\frac{1}{2}$, więc możemy oszacować (*) korzystając z ⑥ (oczywiście ddd n)

$$(*) \underset{n.\Delta}{\leqslant} a(x)\left(|a(x_n-x)-(x_n-x)-1| + |x_n-x_n|\right) \underset{⑥}{\leqslant}$$

$$\overset{⑥}{\leq} a(x)\left(2|x_n-x|^2+|x_n-x|\right) \xrightarrow{n\to\infty} a(x)\cdot(2\cdot 0+0)=0,$$

co oznacza, że $a(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a(x)$.

⑧ $\dfrac{a(x+b_n)-a(x)}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} a(x)$, gdy $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Skoro $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to ddd n $|b_n|<\frac{1}{2}$ i można będzie korzystać z ⑥

$$\frac{a(x+b_n)-a(x)}{b_n} = a(x)\,\frac{a(b_n)-1}{b_n};$$ wystarczy więc wykazać,

że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(b_n)-1}{b_n} = 1$, lub równoważnie, że

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(b_n)-1}{b_n}-1\right|=0.$$ Mamy jednak

$$0 \leq \left|\frac{a(b_n)-1}{b_n}-1\right| = \frac{|a(b_n)-1-b_n|}{|b_n|} \underset{\text{dddn}}{\leq} \frac{2|b_n|^2}{|b_n|} = 2|b_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□.

Liczbę $a(1)=\exp(1)$ oznaczamy przez e;
e jest (co niebawem wykażemy) liczbą niewymierną,
$e \approx 2{,}71828182845\ldots$

<u>Twierdzenie</u>: Każda liczba rzeczywista dodatnia jest wartością funkcji exp, tj. $\forall_{y\in\mathbb{R}}\ \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \exp(x)=y$.
Co więcej, istnieje dokładnie jedno takie x.

<u>Dowód</u>: To, że równanie $\exp(x)=y$ ma, dla ustalonego y, co najwyżej jedno rozwiązanie, łatwo wynika z monotoniczności exp: gdyby $x_1 \neq x_2$, zaś $\exp(x_1)=\exp(x_2)=y$, to albo $x_1<x_2$, albo $x_2<x_1$. W tym pierwszym przypadku z ④ mamy $\exp(x_1)<\exp(x_2)$, w drugim - $\exp(x_2)<\exp(x_1)$,

tak czy tak – sprzeczność.

Musimy jednak wykazać, że równanie to ma jakieś rozwiązanie.

Załóżmy na początek, że $y \in (0,1)$ i rozważmy zbiór

$$A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) \leq y\}.$$

Zbiór A jest

- niepusty, bo biorąc n tak duże, by $n > \frac{1}{y} - 1$, otrzymamy z ⑤

$$\exp(-n) \leq \frac{1}{1+n} < y,$$

a więc $-n \in A$.

- ograniczony z góry, bo z ③ wynika, że $\exp(t) \geq 1$ gdy $t \geq 0$ (można się też powołać na monotoniczność exp), więc, skoro $y \in (0,1)$, żadna liczba dodatnia nie leży w A.

Stąd A ma kres górny; oznaczmy go przez x.

Mamy 3 możliwości: $\exp(x) = y$, $\exp(x) < y$ lub $\exp(x) > y$

Pierwsza kończy dowód.

Jeżeli $\exp(x) < y$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x+\frac{1}{n}) = \exp(x) < y$,

więc z tw. o szacowaniu $\exp(x+\frac{1}{n}) < y$ dla dost. dużych n,

a więc $x + \frac{1}{n} \in A$ (dddn),

ale $x + \frac{1}{n} > x = \sup A$ ↯

Jeżeli $\exp(x) > y$, to, analogicznie, $\exp(x - \frac{1}{n}) > y$ dddn,

ale $x - \frac{1}{n} < \sup A$, więc $\exists_{t \in A}\ x - \frac{1}{n} < t$

Z monotoniczności exp: $y < \exp(x - \frac{1}{n}) < \exp(t) \underset{\text{bo } t \in A}{\leq} y$

i sprzeczność: $y < y$. ↯

W ten sposób zakończyliśmy dowód istnienia rozwiązania równania $\exp(x)=y$, gdy $y\in(0,1)$.

Jeżeli teraz $y>0$, to $\frac{1}{y}\in(0,1)$; równanie

$$\exp(t)=\frac{1}{y} \quad \text{ma (dokł. jedno) rozwiązanie,}$$

kładąc $x=-t$ mamy

$$\exp(x)=\exp(-t)=\frac{1}{\exp(t)}=\frac{1}{1/y}=y.$$

Pozostaje przypadek $y=1$, ale wtedy oczywiście $x=0$ jest rozwiązaniem.

D.

Skoro każdemu $y>0$ możemy przypisać x tż. $\exp(x)=y$, to mamy określoną funkcję $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x$ odwrotną do exp. Oznaczamy ją ln (logarytm naturalny).

$$\ln y = x \iff \exp(x)=y.$$

Tw. (własności logarytmu)

① $\forall_{x,y>0}\ \ln(x y)=\ln x+\ln y$; $\ln e=1$; $\ln 1=0$

② $\forall_{x,y}\ x>y \Rightarrow \ln x>\ln y$

③ $\forall_{y>0}\ 1-\frac{1}{y}\le \ln y\le y-1$

(równoważnie $\forall_{t>-1}\ \frac{t}{t+1}\le \ln(1+t)\le t$)

④ jeżeli $\boxed{\forall_n\ y_n>0}$ i $\lim_{n\to\infty} y_n=y>0$, to $\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\ln y$

jeżeli $\lim_{n\to\infty} y_n>0$, to ddd n ten warunek jest spełniony.

⑤ jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, $\forall_n\ b_n\neq 0$ i $y>0$, to $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(y+b_n)-\ln y}{b_n}=\frac{1}{y}$.

(uwaga do ⑤: żeby napis $\ln(y+b_n)$ miał sens, musi być $y+b_n>0$, ale jeżeli $b_n\to 0$, to dddn $y+b_n>0$).

Dowód tw. o własnościach logarytmu

① oznaczmy $w = \ln x$, $z = \ln y$. Mamy $\exp(w) = x$, $\exp(z) = y$, więc $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z) = x \cdot y$.
Stąd, z def. logarytmu, $\ln(x \cdot y) = w + z = \ln x + \ln y$.
$\ln e = 1$, bo $\exp(1) = e$, $\ln 1 = 0$, bo $\exp(0) = 1$

② jak poprzednio, niech $w = \ln x$, $z = \ln y$. Skoro $x > y$,

to $\exp(w) > \exp(z)$. Mamy 3 możliwości:

(·) $w > z$

(··) $w < z$, ale wtedy $\exp(w) < \exp(z)$ ↯ (z monotoniczności exp)

(···) $w = z$, ale wtedy $\exp(w) = \exp(z)$ ↯

i pozostaje tylko pierwsza możliwość: $w > z \iff \ln x > \ln y$.

③ W badanej nierówności podstawmy $z = \ln y$. Otrzymujemy

$$1 - \frac{1}{\exp(z)} \overset{A}{\leq} z \overset{B}{\leq} \exp(z) - 1$$

wykażemy oddzielnie prawdziwość A i B.

B: $z \leq \exp(z) - 1 \iff z + 1 \leq \exp(z)$ prawda $\forall_{z \in \mathbb{R}}$

A: $$1 - \frac{1}{\exp(z)} \leq z \iff 1 - \exp(-z) \leq z$$
$$\iff \exp(-z) \geq 1 - z$$ też prawda $\forall_{z \in \mathbb{R}}$.

④ Mamy

$$0 \leq |\ln y_n - \ln y| \overset{①}{=} \left|\ln \frac{y_n}{y}\right| \overset{③}{\leq} \max\left(\left|\frac{y_n}{y} - 1\right|, \left|1 - \frac{y}{y_n}\right|\right)$$
$$\leq \left|\frac{y_n}{y} - 1\right| + \left|1 - \frac{y}{y_n}\right| = \frac{|y_n - y|}{y} + \frac{|y_n - y|}{y_n} =$$
$$= |y_n - y|\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

i z tw. o 3 ciągach $\ln y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln y$

(5) Wiemy z (3), że

$$\ln\left(1+\frac{b_n}{y}\right) \le \frac{b_n}{y},$$

(o ile tylko liczba pod logarytmem jest >0, ale dla dużych n tak jest).

a więc

$$0 \geq \ln\left(1+\frac{b_n}{y}\right) - \frac{b_n}{y} = b_n\left[\frac{\ln(y+b_n)-\ln y}{b_n} - \frac{1}{y}\right]$$

$$\overset{(3)}{\geq} \frac{b_n/y}{1+b_n/y} - \frac{b_n}{y} = \frac{b_n}{y}\left(\frac{1}{1+b_n/y} - 1\right)$$

skąd

$$0 \le |b_n|\left|\frac{\ln(y+b_n)-\ln y}{b_n} - \frac{1}{y}\right| \le \frac{|b_n|}{y}\left|\frac{1}{1+b_n/y} - 1\right|$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \left|\frac{\ln(y+b_n)-\ln y}{b_n} - \frac{1}{y}\right| \le \frac{1}{y}\left|\frac{1}{1+b_n/y} - 1\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

co dowodzi, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(y+b_n)-\ln y}{b_n} = \frac{1}{y}$.

Definicja: Dla dowolnej liczby $a>0$ i $y\in\mathbb{R}$ oznaczamy

$$\underline{a^y = \exp(y\ln a)}$$

W szczególności $e^y = \exp(y\ln e) = \exp(y\cdot 1) = \exp(y)$.

Żeby to miało sens, powinniśmy mieć zgodność tej definicji z poprzednią: gdy $y\in\mathbb{Q}$, $y=\frac{p}{q}$ dla $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, to $a^y = (\sqrt[q]{a})^p$. Czy tak jest?

Zauważmy, że

$$\left[\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right)\right]^q = \underbrace{\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right)\cdot\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right)\cdot\ldots\cdot\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right)}_{q \text{ razy}}$$

$$= \exp\Big(\underbrace{\frac{p}{q}\ln a + \frac{p}{q}\ln a + \ldots + \frac{p}{q}\ln a}_{q \text{ razy}}\Big) = \exp(p\ln a) =$$

$$= \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{p \text{ razy}}) = \underbrace{\exp(\ln a)\cdot\exp(\ln a)\cdot\ldots\cdot\exp(\ln a)}_{p \text{ razy}}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{p \text{ razy}} = a^p$$

skąd

$$\exp\left(\frac{p}{q}\ln a\right) = \sqrt[q]{a^p} \qquad \text{czyli tyle, ile trzeba.}$$

Uwaga: Gdy $a<0$, definiowaliśmy potęgi o wykładniku naturalnym (w zwykły sposób) i pierwiastki nieparzystego stopnia — parzystego się nie dało. Niewymiernych wykładników nie da się sensownie zdefiniować!

Pomysł: przybliżamy $\sqrt{2}$ liczbami wymiernymi o nieparzystych mianownikach, np. tak:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309 5\ldots$

$$a_1 = \frac{14}{11} \quad a_2 = \frac{141}{101} \quad a_3 = \frac{1414}{1001} \quad a_4 = \frac{14142}{10001} \quad \text{itd.}$$

$a_n = \dfrac{\alpha_n}{10^n+1}$, gdzie $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 141$, $\alpha_3 = 1414, \ldots$

i wiemy, że $\dfrac{\alpha_n}{10^n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$

$$0 \le |a_n - \sqrt{2}| \le \left|a_n - \frac{\alpha_n}{10^n}\right| + \left|\frac{\alpha_n}{10^n} - \sqrt{2}\right| = \left|\alpha_n\left(\frac{1}{10^n+1} - \frac{1}{10^n}\right)\right| + \left|\frac{\alpha_n}{10^n} - \sqrt{2}\right|$$

$$= \alpha_n\cdot\frac{1}{10^n\cdot(10^n+1)} + \left|\frac{\alpha_n}{10^n} - \sqrt{2}\right| = \underbrace{\frac{\alpha_n}{10^n}}_{\to\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{10^n+1}}_{\to 0} + \underbrace{\left|\frac{\alpha_n}{10^n} - \sqrt{2}\right|}_{\to 0} \to 0$$

więc z tw. o 3 ciągach zdefiniowany przez nas ciąg (a_n) rzeczywiście dąży do $\sqrt{2}$.

Poprawmy go trochę, tak, by liczniki α_n były zawsze parzyste: $\beta_n = 2\left[\frac{\alpha_n}{2}\right]$. $0 \le \alpha_n - \beta_n \le 1$, więc

$$\left| a_n - \frac{\beta_n}{10^n+1} \right| \le \frac{1}{10^n+1} \to 0, \text{ skąd}$$

$$0 \le \left| \frac{\beta_n}{10^n+1} - \sqrt{2} \right| \le \left| \frac{\beta_n}{10^n+1} - a_n \right| + \left| a_n - \sqrt{2} \right| \to 0 \text{ i } \frac{\beta_n}{10^n+1} \to \sqrt{2}.$$

Gdybyśmy chcieli teraz mieć $(-1)^{\sqrt{2}}$ określone przy pomocy ciągu $\frac{\beta_n}{10^n+1}$, jako

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{\beta_n}{10^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10^n+1]{(-1)^{\beta_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10^n+1]{1} = 1$$

musielibyśmy mieć $(-1)^{\sqrt{2}} = 1$.

Zauważmy jednak, że $\left(\frac{\beta_n+1}{10^n+1}\right)$ też dąży do $\sqrt{2}$ (mikrozadanko), a

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{\beta_n+1}{10^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10^n+1]{(-1)^{\beta_n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[10^n+1]{-1} = -1.$$

i próba zdefiniowania $(-1)^{\sqrt{2}}$ jako $\lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{p_n}{q_n}}$, gdzie $\frac{p_n}{q_n} \to \sqrt{2}$ nie udała się – wynik zależy od wyboru ciągu $\frac{p_n}{q_n}$.

<u>Twierdzenie:</u> Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:

$(\cdot)$ $f(x+y) = f(x)f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$(\cdot\cdot)$ $f(1) = e$

$(\cdot\cdot\cdot)$ jeżeli $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, to $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

to $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(x) = \exp(x)$

<u>Dowód:</u> niech $p, q \in \mathbb{N}$

$$\left[f\left(\tfrac{p}{q}\right)\right]^q = \{ \underbrace{f\left(\tfrac{p}{q}\right) \cdot f\left(\tfrac{p}{q}\right) \cdots f\left(\tfrac{p}{q}\right)}_{q \text{ razy}} =$$

$$\overset{(\cdot)}{=} f\Big(\underbrace{\tfrac{p}{q} + \ldots + \tfrac{p}{q}}_{q \text{ razy}}\Big) = f(p) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ razy}}) \overset{(\cdot)}{=} \underbrace{f(1) \cdots f(1)}_{p \text{ razy}}$$

$$= [f(1)]^p \overset{(\cdot\cdot)}{=} e^p$$

skąd

$$f\left(\tfrac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}, \text{ a więc dla } x \in \mathbb{Q},\ x > 0$$

mamy $\exp(x) = e^x = f(x)$.

Gdy $x = 0$:

$\cancel{f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = 1.}$

~~gdyby~~ $\cancel{f(0) = 0, \text{ to } e = f(1) = f(0+1) = f(0}$

$$e = f(1) = f(0+1) = f(0)f(1) = f(0) \cdot e \Rightarrow f(0) = 1 = \exp(0).$$

Gdy $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$: niech $x = -\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f\left(-\tfrac{p}{q}\right) f\left(\tfrac{p}{q}\right) = f\left(-\tfrac{p}{q}\right) \exp\left(\tfrac{p}{q}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(-\tfrac{p}{q}\right) = \frac{1}{\exp(p/q)} = \exp\left(-\tfrac{p}{q}\right).$$

Wiemy więc już, że $\forall_{x\in\mathbb{Q}}\ f(x)=\exp(x)$.
Gdy $x\notin\mathbb{Q}$: weźmy ciąg $\frac{p_n}{q_n}\to x$, $p_n\in\mathbb{Z}, q_n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) & \xrightarrow{(\ldots)} & f(x) \\ \| & & \\ \exp\left(\frac{p_n}{q_n}\right) & \xrightarrow{\text{ciągłość } \exp} & \exp(x) \end{array}$$

skąd $f(x)=\exp(x)$.

$\square$.

<u>Własności potęgi:</u> Łatwo można sprawdzić, korzystając z własności exp i ln, że potęgowanie zdefiniowane wzorem $a^y=\exp(y\ln a)$ ma wszystkie znane nam własności arytmetyczne:

$$a^{x+y}=a^xa^y \qquad (ab)^z=a^zb^z$$
$$a^{-y}=\frac{1}{a^y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^z=\frac{a^z}{b^z}$$
$$(a^x)^y=a^{xy}$$

względem porządku:

gdy $a>1$, $x<y$, to $a^x<a^y$

$a\in(0,1)$, $x<y$, to $a^x>a^y$

$0<a<b$, $x>0$, to $a^x<b^x$

$0<a<b$, $x<0$, to $a^x>b^x$

i względem granicy:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R},\ a>0, \text{ to } \lim_{n\to\infty}a^{x_n}=a^x$$

<u>Uwaga do ost. własności</u>: ostrożnie, gdy $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$!

$a^\infty=\infty$ gdy $a>1$,

$\quad=0$ gdy $a\in(0,1)$

i jest nieokreślone gdy $a=1$: $1^n\to1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow{(1^\infty)}e$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\xrightarrow{(1^\infty)}\infty$$

Twierdzenie: Niech $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ i dodatkowo niech istnieje $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = g$. Wówczas $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g$

Uwaga: by napis $(1+a_n)^{b_n}$ miał sens, musimy mieć $1+a_n > 0$. To nie musi być prawda dla wszystkich n, ale dla dost. dużych tak, bo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc $1+a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Dowód: Na początek wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} b_n \ln(1+a_n) = g$.
Wiemy, że (dla n tak dużych, by napisy miały sens)

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leq \ln(1+a_n) \leq a_n$$

Dddn $b_n > 0$ (bo $b_n \to \infty$), wówczas

$$g = \frac{g}{1+0} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{1+a_n} \leq b_n \ln(1+a_n) \leq a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} g$$

i z tw. o 3 ciągach $\lim_{n\to\infty} b_n \ln(1+a_n) = g$.

$$(1+a_n)^{b_n} = \exp(b_n \ln(1+a_n))$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(b_n \ln(1+a_n)) =$$

$$\underset{\text{z ciągłości exp}}{=} \exp(\lim_{n\to\infty} b_n \ln(1+a_n)) = \exp(g) = e^g.$$

$\square$