(21)

Twierdzenie: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ istnieje $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ takie, że $a<y<b$.

Dowód: z poprzedniego twierdzenia istnieje liczba wymierna x ~~...~~ między 0 a $\frac{b-a}{\sqrt{2}}$

$$0<x<\frac{b-a}{\sqrt{2}},$$

a zatem $0<x\sqrt{2}<b-a$.

Rozpatrzymy teraz 2 przypadki. W pierwszym założymy, że a jest liczbą wymierną. Wówczas możemy położyć $y=a+x\sqrt{2}$. Oczywiście $a<y=a+x\sqrt{2}<a+(b-a)=b$. Gdyby $y\in\mathbb{Q}$, to $\sqrt{2}=\frac{y-a}{x}$ też byłoby liczbą wymierną, a nie jest – zatem $y\notin\mathbb{Q}$.

Drugi przypadek to $a\notin\mathbb{Q}$. Możemy wówczas przyjąć $y=a+x$. Mamy $a<y=a+x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bo } \sqrt{2}>1, \\ \text{więc } x\sqrt{2}>x}}{<} a+x\sqrt{2}<a+(b-a)=b$, i oczywiście $y\notin\mathbb{Q}$, bo gdyby $y\in\mathbb{Q}$, to $y-x=a$ też byłoby wymierne, a założyliśmy, że nie jest.

CIĄGI

Def: Ciągiem liczb rzeczywistych nazywamy dowolną funkcję określoną na $\mathbb{N}$, o wartościach w $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N}\ni n \xrightarrow{a} a(n) \equiv \underbrace{a_n}_{\text{tradycyjny zapis}}$$

$$a: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

Def: Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, (odpowiednio niemalejący) jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n < a_{n+1}$
(odp. $a_n \leq a_{n+1}$)

Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący (odp. nierosnący) jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > a_{n+1}$
(odp. $a_n \geq a_{n+1}$)

Def: Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry (odp. z dołu), jeżeli $\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \leq M$
(odp. $a_n \geq M$)

i najważniejsza definicja:

Def. Mówimy, że $g\in\mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli dla ~~dl~~ każdego $\varepsilon>0$ istnieje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takie, że $\forall_{n>n_\varepsilon}\ |a_n-g|<\varepsilon$

Należy to czytać tak: jakkolwiek małej liczby $\varepsilon>0$ nie weźmiemy, zawsze znajdziemy taki wyraz ciągu (a_n), że dalsze wyrazy (~~tezz~~ a_n z $n>n_\varepsilon$) są od g oddalone o mniej niż ε.

<u>Def</u>: Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę g, to mówimy, że jest <u>zbieżny</u> (do g). Jeżeli nie ma takiej $g \in \mathbb{R}$, że g jest granicą $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem <u>rozbieżnym</u>.

<u>Twierdzenie</u>: Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

<u>Dowód</u>: (nie wprost) Niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granice g_1 i g_2, $g_1 \neq g_2$.
Oznacza to, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_1\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_1} \; |a_n - g_1| < \varepsilon$
oraz $\exists_{n_2\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_2} \; |a_n - g_2| < \varepsilon$.

Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Dla $n > \max(n_1, n_2)$ zachodzą nierówności

$$|a_n - g_1| < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$$
$$|a_n - g_2| < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$$

Dodając je stronami otrzymujemy

$$(*) = |a_n - g_1| + |a_n - g_2| < |g_1 - g_2| ,$$

ale z nierówności trójkąta mamy

$$|g_1 - g_2| = |(g_1 - a_n) + (a_n - g_2)| \leq |g_1 - a_n| + |a_n - g_2| = (*)$$

$\lightning$

Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy pewną szczególną kategorię, mającą więcej wspólnego z ciągami zbieżnymi niż z resztą ciągów rozbieżnych.

Def: Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (odp. rozbieżny do $-\infty$) jeżeli ~~$\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_M\in\mathbb{N}}$~~

$\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_M\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_M} \quad a_n > M$ (odp. $a_n < M$).

Oznaczenie: Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do granicy g, to piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Analogicznie, jeżeli (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (odp. $-\infty$) to piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(-\infty)$.

lim – łac. limes – granica.

Twierdzenie: Ciąg zbieżny jest ograniczony (z góry i z dołu).

Dowód: Niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę g. Wypisując definicję granicy dla $\varepsilon = 1$ otrzymujemy

$$\exists_{n_1\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_1} \ |a_n - g| < 1.$$

Ta nierówność jest równoważna $-1 < a_n - g < 1$, czyli $g-1 < a_n < g+1$. $(\forall_{n>n_1})$
Stąd wszystkie wyrazy (a_n) o indeksach $n > n_1$ leżą między $g-1$ a $g+1$, a pozostałych ~~$n_1 - 1$~~ n_1 wyrazów jest ograniczone – bo jest ich skończenie wiele. Ostatecznie

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \min(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, g-1) \le a_n \le \max(a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, g+1).$$

(25)

Uwaga: ciągi nierosnące i niemalejące obejmujemy wspólną nazwą ciągów monotonicznych; rosnące i malejące - ściśle monotonicznych.

Twierdzenie: Ciąg niemalejący i ograniczony z góry (odp. nierosnący i ograniczony z dołu) ma granicę.

Dowód: Wykażemy twierdzenie dla ciągu niemalejącego, ograniczonego z góry; dowód drugiego przypadku przebiega w zasadzie tak samo.

Wykażemy, że poszukiwaną granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $g = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Mamy oczywiście
$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \; g+\varepsilon > g \geq a_n$, więc $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; g+\varepsilon > a_n$ (*)

Z drugiej strony liczba $g-\varepsilon$ jest mniejsza od $\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$, więc dla pewnego n_ε mamy $g-\varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. No, ale ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, więc $\forall_{n>n_\varepsilon} \; a_n \geq a_{n_\varepsilon} > g-\varepsilon$. Stąd i z (*)

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} \quad g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon \iff |a_n - g| < \varepsilon \qquad \square$$

Uwaga: Ciąg ~~rosnący~~ niemalejący i nieograniczony z góry (analogicznie nierosnący i nieograniczony z dołu) jest rozbieżny do ∞ (odp. $-\infty$).

Dowód: Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony z góry, to $\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_M} \; a_{n_M} > M$. Z tego, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący, mamy $\forall_{n>n_M} \; a_n \geq a_{n_M}$ $\Longrightarrow \forall_{M\in\mathbb{R}} \exists_{n_M} \forall_{n>n_M} \; a_n > M$. $\square$

~~Definicja~~ Ciąg liczb naturalnych to oczywiście taki ciąg, którego wyrazy należą do $\mathbb{N}$.

Def: Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Ciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Przykłady: Ciągi $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ $\quad n_k = 2k-1$

$a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots$ $\quad n_k = 2^k$

itp.

Twierdzenie: Jeżeli ciąg ~~je~~ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do granicy g, to wszystkie jego podciągi również. Analogicznie, jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny do ∞ ($-\infty$), to wszystkie jego podciągi też rozbiegają do ∞ ($-\infty$).

Dowód: bardzo prosty. Zauważmy, że jeżeli $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to

$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ n_k \geq k$. Wykażemy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$.

Wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n-g|<\varepsilon$.

Zauważmy, że $\forall_{k>n_\varepsilon}\ n_k \geq k > n_\varepsilon$, zatem

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{k>n_\varepsilon} |a_{n_k}-g|<\varepsilon.$$

Dowód w przypadku, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ pozostawiam słuchaczom.

Twierdzenie o trzech ciągach $\quad (n>\tilde{n})$

Jeżeli dla dost. dużych n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do tej samej granicy g, to również $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Dowód (prosty, choć twierdzenie bardzo ważne)

Wiemy, że $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_\varepsilon} \ \forall_{n>n_\varepsilon} \ |a_n - g| < \varepsilon$
oraz $|c_n - g| < \varepsilon$

(wystarczy wziąć $n_\varepsilon = \max\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dobrane} \\ \text{do } (a_n)}}{n_{\varepsilon,a}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dobrane} \\ \text{do } (c_n)}}{n_{\varepsilon,c}}\}$).

Nierówności te oznaczają, że

$\forall_{n>n_\varepsilon} \quad g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon$

oraz $g-\varepsilon < c_n < g+\varepsilon$.

Stąd jednak, o ile n jest dost. duże
($n > \tilde{n}$ oraz $n > n_\varepsilon$)

$$g-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad g-\varepsilon < b_n < g+\varepsilon \iff |b_n - g| < \varepsilon$$

Ostatecznie kładąc $\acute{n}_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, \tilde{n})$ mamy

$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\acute{n}_\varepsilon} \ \forall_{n>\acute{n}_\varepsilon} \ |b_n - g| < \varepsilon$, a zatem $\lim_{n\to\infty} b_n = g$. $\square$

Prawdziwe są też (prościutkie ćwiczenie) następujące warianty z ciągami rozbieżnymi do $\pm\infty$:

- Jeżeli $\underbrace{\text{d.d.d.}}_{\text{dla dost. dużych}}$ n $\quad a_n \leq b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,
to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

- Jeżeli d.d.d. n $\quad a_n \leq b_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$,
to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Własności arytmetyczne granicy ciągu

Uwaga 1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -g$.

Dowód: $\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n - g| < \varepsilon \iff$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |(-a_n) - (-g)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Uwaga 2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $\lim_{n\to\infty} b_n = h$, to ciąg $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i ma granicę $g+h$.

Dowód:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_{\varepsilon,1}} \forall_{n>n_{\varepsilon,1}} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists_{n_{\varepsilon,2}} \forall_{n>n_{\varepsilon,2}} |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2}$, biorąc więc $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$ dostajemy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} |a_n - g| < \varepsilon/2 \text{ oraz } |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mamy $|(a_n + b_n) - (g+h)| \le |a_n - g| + |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ i nierówność ta zachodzi $\forall_{n>n_\varepsilon}$. To dowodzi, że $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g + h$.

Uwaga 3. Z poprzednich 2 uwag mamy
$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$ (o ile (a_n) i (b_n) są zbieżne).

Uwaga 4. Jeżeli ~~$\lim_{n\to\infty} a_n$~~ ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do g, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do h, to $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do gh.

Dowód: Skoro ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne, to są ograniczone. Istnieje zatem $M > 0$ takie, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < M$, $|b_n| < M$ (wystarczy wziąć $M = \max.$ modułów ograniczeń górnych i dolnych dla obu ciągów $+1$)

Ze zbieżności a_n

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_{\varepsilon,a}} \forall_{n>n_{\varepsilon,a}} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

oraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_{\varepsilon,b}} \forall_{n>n_{\varepsilon,b}} |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2M}$

Kładąc $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,a}; n_{\varepsilon,b})$ mamy
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} \; |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2M}, \; |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Wówczas
$$|a_n b_n - gh| = |a_n b_n - g b_n + g b_n - gh| \le$$
$$\le |a_n b_n - g b_n| + |g b_n - gh| \le$$
$$\le |b_n||a_n - g| + |g||b_n - h| <$$
$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |g| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = (*)$$

Potrzebny nam jest jeszcze dodatkowy fakt, który sformułujemy jako twierdzenie i udowodnimy za chwilę:

~~Twierdzenie:~~
~~jeżeli d.d.d. n $a_n < M$ $(a_n > M)$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$ $(\lim a_n$~~

na wykładzie będzie wcześniej

Twierdzenie ①. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i dla d.d. n zachodzi $a_n < M$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$. Podobnie, gdy d.d.d. n $a_n > M$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \ge M$.

②. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n < M$, to d.d.d. n zachodzi nierówność $a_n < M$. Podobnie, gdy $\lim_{n\to\infty} a_n > M$, to d.d.d. n $a_n > M$.

Na mocy ① mamy $|g| \le M$, zatem kontynuując dowód

$$(*) = M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |g| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \le \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$ a więc

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon}$ $|a_n b_n - gh| < \varepsilon$, więc gh jest granicą ciągu $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Dowód wtrąconego twierdzenia

① Zajmę się tylko pierwszym przypadkiem ($a_n < M$ dla dost. dużych n) – drugi zostawiam słuchaczom. Dowód nie wprost – załóżmy, że dla $n > n_0$ mamy $a_n < M$, ale $g = \lim_{n\to\infty} a_n > M$. Połóżmy $\varepsilon = \frac{g-M}{2}$ i dobierzmy n_ε tak, by
$$\forall_{n>n_\varepsilon} \quad |a_n - g| < \varepsilon = \frac{g-M}{2}.$$
Wynika stąd, że
$$g - a_n \leq |a_n - g| < \frac{g-M}{2} \iff a_n > \frac{g}{2} + \frac{M}{2} > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$
dla wszystkich $n > n_\varepsilon$ ↯

② Jak poprzednio, wykażemy tylko pierwszy przypadek. Skoro $g = \lim_{n\to\infty} a_n < M$, to przyjmijmy $\varepsilon = \frac{M-g}{2}$. Z def. granicy $\exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon} \; |a_n - g| < \frac{M-g}{2}$. W szczególności
$$\forall_{n>n_\varepsilon} \quad a_n - g \leq |a_n - g| < \frac{M-g}{2}, \text{ skąd}$$
$$\forall_{n>n_\varepsilon} \quad a_n \leq \frac{M+g}{2} < \frac{M+M}{2} = M \qquad \square.$$

<u>Uwaga 5</u>. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, $\lim_{n\to\infty} b_n = h \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $\frac{g}{h}$.

<u>Dowód:</u> Ze zbieżności $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ możemy znaleźć $\tilde{n}_\varepsilon$ takie, ~~że~~ $\forall_{n>\tilde{n}_\varepsilon}$ zachodzą nierówności
$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon \cdot |h|}{4}$$
$$|b_n - h| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{h^2}{|g|+1}$$
(dobieramy $n_{\varepsilon,1}$ do $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon|h|}{4}$ dla ciągu (a_n), $n_{\varepsilon,2}$ do $\tilde{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{h^2}{|g|+1}$ dla (b_n) i bierzemy większe z dwóch)

Z wtrąconego twierdzenia, punkt ②, wiemy, że dla $n > \hat{n}$ zachodzi też $|b_n| > \frac{|h|}{2}$ (gdy $h>0$, z pierwszego, gdy $h<0$ – z drugiego przypadku).

(31)

Biorąc $n_\varepsilon = \max(\tilde{n}_\varepsilon, n')$ mamy dla $n > n_\varepsilon$ trzy nierówności

$$|a_n - g| < \frac{\varepsilon \cdot |h|}{4}, \quad |b_n - h| < \frac{\varepsilon \cdot h^2}{4(|g|+1)}, \quad |b_n| > \frac{|h|}{2}.$$

Oszacujmy zatem

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g}{h}\right| = \left|\frac{a_n h - b_n g}{b_n h}\right| = \left|\frac{a_n h - gh + gh - b_n g}{b_n h}\right|$$

$$\leq \frac{|a_n h - gh| + |gh - b_n g|}{|b_n h|} < \frac{|a_n - g||h| + |g||b_n - h|}{\frac{|h|}{2} \cdot |h|} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon \cdot |h|}{4} \cdot |h| + |g| \cdot \frac{\varepsilon \cdot h^2}{4(|g|+1)}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{\varepsilon\left(1 + \frac{|g|}{|g|+1}\right)}{2}$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ skąd } \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g}{h}\right| < \varepsilon \text{ dla } n > n_\varepsilon.$$

To dowodzi, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h}$.

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód: Załóżmy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \in [-M, M]$ (a więc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony). Przez A oznaczmy zbiór $A = \{x \in [-M-1, M+1] :$ tylko skończenie wiele wyrazów (a_n) jest $< x\}$.

$A \neq \emptyset$, bo $-M \in A$, A ograniczony (bo $\subset [-M-1, M+1]$).

Niech $g = \sup A$. Zauważmy, że $\forall_{k\in\mathbb{N}}$ liczba $g - \frac{1}{k}$ należy do A (więc nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest $> g - \frac{1}{k}$), a liczba $g + \frac{1}{k}$ nie (a więc nieskończenie wiele a_n jest $< g - \frac{1}{k}$).

skończenie jest $< g - \frac{1}{k}$

Stąd w $(g - \frac{1}{k}, g + \frac{1}{k})$ jest nieskończenie wiele wyrazów (a_n). Wybieramy n_1 tak, by $a_{n_1} \in (g-1, g+1)$, n_2 tak, by $n_2 > n_1$, $a_{n_2} \in (g-\frac{1}{2}, g+\frac{1}{2})$, ~~$a_{n_k} > a_{n_{k-1}}$~~ $n_k > n_{k-1}$, $a_{n_k} \in (g-\frac{1}{k}, g+\frac{1}{k})$.

W ten sposób $\forall_\varepsilon \exists_{k_0} \forall_{k>k_0}\ a_{n_k} \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$.

$(k_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]+1$, wtedy $\frac{1}{k_0} < \varepsilon)$.

zatem $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$

Inny dowód (Bolzano?)

B. Bolzano 1781–1848 ksiądz, Czech poch. włoskiego
pierwsza ścisła def. granicy ciągu, wzór Cauchy'ego,
funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna; zapomniany.

(Szkic) ciąg (c_n) ograniczony, $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_n \in [-M, M]$

Dzielimy $[-M, M]$ na pół: $[-M, 0]$, $[0, M]$

W co najmniej jednym z tych przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Wybieram ten przedział, ozn. $[a_1, b_1]$ $([a_0, b_0] = -M, M)$.

Dzielę $[a_1, b_1]$ na pół, w jednej z połówek jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczam tę połówkę przez $[a_2, b_2]$. Itd., tworzę ciąg odcinków $[a_n, b_n]$ takich, że w każdym jest ∞-wiele wyrazów ciągu, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ to połowa $[a_n, b_n]$.

- ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący i ograniczony z góry (przez M)
- ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu (przez $-M$)

$\Rightarrow$ oba mają granice, $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Mamy też

$$b_n = a_n + \underbrace{\frac{M}{2^{n-1}}}_{\to 0} \longrightarrow a$$

$$b_n \to b \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Wybierzmy teraz w $[a_1, b_1]$ jakieś c_{n_1}, w $[a_2, b_2]$ c_{n_2} takie, że $n_2 > n_1$ itd, w $[a_k, b_k]$ c_{n_k} tż $n_k > n_{k-1}$

$$\begin{array}{ccccc} a_k & \le & c_{n_k} & \le & b_k \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ a & & & & b = a \end{array}$$

i z tw. o 3 ciągach mamy

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = a.$$

□

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny, ale nie jest rozbieżny do $\pm\infty$, to istnieją 2 podciągi $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mające różne (być może nieskończone) granice.

<u>Uwaga</u>: Oczywiście jeżeli ciąg (a_n) ma 2 podciągi o różnych granicach, to nie może być zbieżny – dowiedliśmy twierdzenia, że wszystkie podciągi ciągu zbieżnego są zbieżne do tej samej granicy.

<u>Dowód twierdzenia</u>

~~Skoro ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest rozbieżny do ∞, to istnieje $M\in\mathbb{R}$ takie, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest~~ ~~mniejsze~~ ~~$\le$ od M. (W przeciwnym razie $\forall_{M\in\mathbb{R}}$ tylko skończenie wiele a_n jest $\le M \Rightarrow \exists_{n_M} \forall_{n>n_M}\ a_n > M \Leftrightarrow a_n \to \infty$)~~

a) jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony z góry, to ma podciąg zbieżny do ∞.
Musi jednak istnieć M takie, że nieskończenie wiele wyrazów jest $< M$, w przeciwnym razie $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

- Jeżeli zbiór wyrazów $< M$ jest nieograniczony z dołu, to wybieramy z nich podciąg zbieżny do $-\infty$ – i mamy 2 podciągi, zb. do $+\infty$ i do $-\infty$.

Jeżeli ten zbiór wyrazów (nieskończony, a więc podciąg) jest ogr. z dołu, to z tw. B.-W. można z niego wybrać podciąg zbieżny (do granicy skończonej) – – i mamy drugi szukany podciąg.

b) jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieograniczony z dołu, to postępujemy analogicznie jak wyżej – mamy podciąg $\to -\infty$, ale i ∞-wiele wyrazów $> M$ itd.

c) jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, to z tw. B.-W. istnieje podciąg zbieżny do g.
Z drugiej strony $\exists_{\varepsilon>0}$ t.ż.
niesk. wiele wyrazów (a_n) leży poza $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$.
Z nich też można wybrać podciąg zbieżny, ale już nie do g. $\square$.

35

Funkcja wykładnicza i okolice

Uwaga: Kiedy w nierówności Bernoulliego

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad n\in\mathbb{N},\ x>-1$$

zachodzi równość? Odp: 1 gdy $n=1$

lub 2 gdy $x=0$

Dowód: Jeżeli 2, to oczywiste.

$$(1+0)^n = 1+n\cdot 0.$$

Załóżmy zatem, że $x\neq 0$, $n>1$.

Skoro $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, to $n-1\in\mathbb{N}$ i mamy

$$(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x.$$

Pomnóżmy, jak w dowodzie n.B., obie strony nierówności przez $(1+x)$: $\qquad (1+x>0)$

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+(n-1)x)(1+x) =$$
$$= 1+nx+(n-1)x^2 > 1+nx$$

chyba, że $(n-1)x^2=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{lub} \\ n=1 \end{cases}$

Lemat: Niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n = 1$.

Dowód: Skoro $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to

$$\exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ |na_n|<\frac{1}{2} \iff |a_n|<\frac{1}{2n}, \quad \boxed{\text{w szczególności } \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

czyli $\forall_{n>n_0}\ a_n>-1$

mamy też $\forall_{n>n_0}\ \dfrac{a_n}{1+a_n}<1 \quad \left(\dfrac{a_n}{1+a_n} = 1-\dfrac{1}{1+a_n} < 1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}} < 1\right)$

oraz $\forall_{n>n_0}\ \dfrac{na_n}{1+a_n}<1 \quad \left(\dfrac{na_n}{1+a_n} < \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2n}} < \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1\right)$

Użyjemy teraz nierówności Bernoulliego:

dla $n > n_0$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = (1+a_n)^n \underset{\text{n.B+}}{\geq} 1 + na_n \xrightarrow{n\to\infty} 1+0=1$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{na_n}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{1+\underbrace{(n-1)a_n}_{na_n-a_n}} \longrightarrow \frac{1+0}{1+0\cdot 0}=1$$

$$(*)\ \left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \underset{\text{n.B}+}{\geq} 1 - \frac{na_n}{1+a_n} > 0$$, więc można odwrotności porównać, z poprzednią nierównością.

z tw. o trzech ciągach $\lim (1+a_n)^n = 1$.

Bardzo ważny ciąg: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Na początek wykażemy, że ciąg ten ma granicę skończoną dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

① wykażemy, że $a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest, dla dost. dużych n, rosnący.

Uwaga: Wyjątkiem jest przypadek $x=0$; od razu widać, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n(0)=1$, więc $a_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Wykażemy, że $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}\ a_{n+1}(x) > a_n(x)$. Skorzystamy, oczywiście z nierówności Bernoulliego:

$$a_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \overset{?}{>} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_n(x)$$

$$\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+x}\right)^{n+1} \overset{?}{>} \frac{n}{n+x}$$

$$\left(\frac{n^2+nx+n}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1} \overset{?}{>} \frac{n}{n+x}$$

37

$$\left(1-\frac{x}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1} \overset{?}{>} \frac{n}{n+x}$$

chcielibyśmy użyć nierówności Bernoulliego, ale musimy upewnić się, czy

$$\frac{x}{n^2+nx+n+x} = \frac{x}{(n+x)(n+1)} \overset{?}{<} 1$$

(nierówność B. jest ostra, bo $n+1>1$, $x\neq 0$)

dla $n>x$ mianownik ułamka jest dodatni i możemy pomnożyć nierówność stronami przez $(n+x)(n+1)$

$$x \overset{?}{<} (n+1)(n+x) = n^2+n+(n+1)x$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{n^2+n(x+1) > 0}$$

$$f(n) = n(n+x+1) \overset{?}{>} 0$$

wiemy, że wykres $f(n)$ to parabola, o miejscach zerowych w 0 i $(-x-1)$, dla $n>\max(-x-1,0)$ zarówno n, jak i $(n+x+1)$ są dodatnie, więc $f(n)>0$.

Zatem dla $n>n_0=\max(-x-1,0)$ możemy użyć n. Bernoulliego:

$$\left(1-\frac{x}{\underset{(n+x)(n+1)}{\underset{\shortparallel}{n^2+nx+n+x}}}\right)^{n+1} > 1-\frac{(n+1)x}{(n+x)(n+1)} = 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}.$$

Wiemy zatem, że ciąg $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, jako ciąg rosnący, na pewno ma granicę — ale czy jest ona $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ skończona? By to wykazać, musimy udowodnić (2) że $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry, albo jakoś inaczej wykazać, że dąży do granicy skończonej.

Ograniczoność $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ łatwo wykazać w przypadku, gdy $x<0$. Mamy wówczas

$$0 < 1+\frac{x}{n} < 1 \qquad \text{dla} \quad n > x$$

zatem $0=0^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 1^n = 1$

Dla $x>0$ możemy skorzystać z następującego tricku:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{b_n}{c_n}$$

ciąg (c_n) jest postaci $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, dla $z<0$, więc jest rosnący i ogr. z góry $\Rightarrow$ ma granicę skończoną. Ciąg (b_n) jest zbieżny do 1 na mocy Lematu, gdyż $n\cdot\left(-\frac{x^2}{n^2}\right) = -\frac{x^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ istnieje i jest równa $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$ (warto to zapamiętać).

Inny, interesujący sposób tylko państwu naszkicuję — proszę potraktować to jako zadanie:

Tu nie wyraźnie popełniłem błąd - malejący jest ciąg $(1+\frac{x}{n})^{n+m}$ gdzie $m \in \mathbb{N}$, $m > x$. Reszta działa.

① Dla $x \geq 1$ ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+m}$, gdzie $m > x$ jest malejący

② Dla $x \geq 1$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+m} < \left(1+\frac{x}{1}\right)^{m+1} = (1+x)^{m+1}$

③ Dla $x \in (0,1)$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (1+1)^2 = 4.$

Stąd ciąg $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ jest ograniczony z góry $\forall_{x>0}$, a dla $x \leq 0$ tak, jak poprzednio.

<u>Oznaczenie:</u> $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

wykazaliśmy już, że

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Następna ważna własność:

- $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

Dowód: ~~exp(x+y)~~ $\frac{\exp(x)\cdot\exp(y)}{\exp(x+y)} = \lim_{n\to\infty}$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n+x}{n}\cdot\frac{n+y}{n}\right]^n}{\left(\frac{n+x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+nx+ny+xy}{n^2+nx+ny}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{xy}{n^2+nx+ny}\right)^n.$$ Ta ostatnia granica

jest równa 1 na mocy Lematu, gdyż

$$n \cdot \frac{xy}{n^2+nx+ny} = \frac{xy}{n+x+y} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \left(\frac{xy}{1+\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{x}{n}}+\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{y}{n}}} \right) \longrightarrow 0 \cdot \frac{xy}{1+0+0} = 0.$$

Potęgi: Na razie zdefiniowaliśmy

a^n, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wykazaliśmy też istnienie pierwiastków dowolnego stopnia $\Rightarrow$ możemy zdefiniować a do dow. potęgi wymiernej dodatniej $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Dla $q < 0$ przyjmujemy $a^q = \frac{1}{a^{-q}}$.

Jak jednak zdefiniować a^r, gdzie $a > 0$, $r \in \mathbb{R}$?

Zauważmy, że $\forall_{q \in \mathbb{Q}}$ mamy $\exp(qx) = [\exp(x)]^q$
(Uwaga: $1 + \frac{x}{n} > 0$ dla $n > x$, więc $(1+\frac{x}{n})^n > 0$, a że ciąg jest rosnący, to $\lim (1+\frac{x}{n})^n > 0$, więc $\forall_{x \in \mathbb{R}}$ $\exp(x) > 0$).

Dowód: Niech $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{\exp\left(\tfrac{x}{n}\right) \cdot \exp\left(\tfrac{x}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\tfrac{x}{n}\right)}_{n \text{ razy}} = \exp\left(\left(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) x\right) = \exp(x), \text{ więc}$$

$$\exp\left(\tfrac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(x)}$$

Jeżeli $m \in \mathbb{N}$, to $\exp(mx) = \exp(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{m \text{ razy}}) =$

$$= \exp(x) \cdot \exp(x) \cdot \ldots \cdot \exp(x) = [\exp(x)]^m$$