półprostej czy prostej dziur nie ma.

Tak samo nadzimy sobie pokazując, że ~~nie ma~~ jeżeli x_0 jest punktem skupienia $A \cap (x_0, \infty)$, to $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. W ten sposób widzimy, że jeżeli tylko $x_n \to x_0$, $x_n \in A$, to $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (dzielimy (x_n) na ≤ 3 podciągi: wyrazy $< x_0$, $> x_0$ i $= x_0$). □.

⑨ funkcja Dirichleta:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.

Szczególnie ważną rolę odgrywają funkcje ~~ciągłe~~ „w każdym punkcie tak samo ciągłe" – funkcje jednostajnie ciągłe.

Def: Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest na A jednostajnie
na zbiorze, nie w punkcie!
ciągła, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x, y \in A} \text{ jeżeli } |x-y| < \delta \text{, to } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(porównajmy z otoczeniową charakt. ciągłości w każdym punkcie $x \in A$:

$$\forall_{x \in A} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{y \in A} \text{ jeżeli } |x-y| < \delta \text{, to } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.)$$

na górze ε nie zależy od x, a na dole może.

f jednostajnie ciągła, gdy możemy dobrać δ do ε wspólnie dla wszystkich $x \in A$.

Przykład tego mieliśmy badając ciągłość sinusa - wystarczyło wziąć $\delta = \varepsilon$, niezależnie od x_0. Jest to szczególny przypadek sytuacji, jaką mamy dla całej klasy funkcji spełniających nierówność podobną do $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$:

<u>Def</u>: Funkcja f spełnia na A warunek Lipschitza (jest lipszycowska) ze stałą L, jeżeli

$$\forall_{x,y\in A} \; |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$$

$\sin x$ i $\cos x$ spełniają w. L. ze stałą $L=1$.

<u>Twierdzenie</u>: Każda funkcja lipszycowska na A jest na A jednostajnie ciągła.

<u>Dowód</u>: taki sam, jak dla sinusa:

Badamy, czy $\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_{x,y\in A} \; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Ustalamy $\varepsilon>0$ i kładziemy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, gdzie L jest stałą Lipschitza funkcji f. Wówczas

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \underset{\text{war. Lipschitza}}{\leq} L|x-y| \leq L\cdot\delta = L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

□.

Dalsze przykłady funkcji spełniających warunek Lipszyca:

- dowolny wielomian, określony na zbiorze ograniczonym w $\mathbb{R}$, jest na tym zbiorze funkcją lipszycowską (a więc jednostajnie ciągłą).

Dowód: Oznaczmy nasz wielomian przez $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, a zbiór przez A, przy czym $x \in A \Rightarrow |x| < M$.

A jest ograniczony

Niech $x, y \in A$

$$|W(x) - W(y)| = |a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \ldots + a_1(x-y)| \leq$$

$$\leq |a_n||x-y||x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| +$$
$$+ |a_{n-1}||x-y||x^{n-2} + x^{n-3}y + \ldots + y^{n-2}| + \ldots$$
$$\ldots + |a_1||x-y| \leq$$
$$\leq |x-y|\Big[|a_n|\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \ldots + |x||y|^{n-2} + |y|^{n-1}\right) +$$
$$+ |a_{n-1}|\left(|x|^{n-2} + |x|^{n-3}|y| + \ldots + |y|^{n-2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + |a_1||x-y|\Big]$$
$$\leq |x-y| \underbrace{\left[|a_n| M^{n-1} n + |a_{n-1}| M^{n-2}(n-1) + \ldots + |a_2| M + |a_1|\right]}_{\text{stała Lipszyca } W(x) \text{ na } A}.$$

Z drugiej strony na zbiorach nieograniczonych już tak dobrze nie jest: funkcja $f(x) = x^2$ nie spełnia warunku Lipszyca na żadnym zbiorze nieograniczonym. Załóżmy bowiem, że A jest zbiorem nieograniczonym (tj. zawiera ciąg (x_n) t.ż. $|x_n| \to \infty$), a $f(x) = x^2$ spełnia warunek Lipszyca ze stałą L. Mamy

$$|f(x_n)-f(x_1)| = |x_n^2 - x_1^2| = |x_n - x_1||x_n + x_1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{war. Lipszyca.}}}{\leq} L|x_n - x_1| \quad (*)$$

Skoro $|x_n| \to \infty$, to dla dużych n mamy $x_n \neq x_1$, więc z $(*)$ mamy $|x_n + x_1| \leq L$ dla każdego $n > n_0$.
Z drugiej strony $|x_n + x_1| \geq |x_n| - |x_1|$, co razem daje $|x_n| \leq L + |x_1|$ ← sprzeczność z tym, że $|x_n| \to \infty$.

Z tego nie wynika jeszcze, czy $f(x) = x^2$ jest na A jednostajnie ciągła, czy nie. Odpowiedź zależy od zbioru A – łatwo można sprawdzić, że $f(x)$ jest jednostajnie ciągła np. na $A = \mathbb{N}$ (zadanie), ale nie jest jednostajnie ciągła ani na $[0, \infty)$, ani tym bardziej na całej prostej:

załóżmy przeciwnie: $\forall_{\varepsilon > 0} \exists \delta_\varepsilon > 0 \underset{x,y \in [0,\infty)}{\forall} |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Przyjmijmy $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\delta_1}$, $y = \frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2}$.
Wówczas $|x-y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$, ale

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2\right| = \left|1 + \frac{\delta_1^2}{4}\right| =$$

$$= 1 + \frac{\delta_1^2}{4} > 1 = \varepsilon. \quad \text{⚡}.$$

- Rozpatrzmy $f(x) = \sqrt{x}$ na ~~przedziale~~ półprostej $[0, \infty)$.

① $f(x)$ nie spełnia na $[0,\infty)$ warunku Lipszyca dla żadnej stałej L. Załóżmy bowiem, że

$$\exists_L \forall_{x,y \in [0,\infty)} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x-y|.$$

Wówczas nierówność ta zachodzi np. dla $x = x_n = \frac{1}{n^2}$, $y = 0$.
(i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$)

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq L|x-y| \Rightarrow n \leq L$$

$$\overset{\shortparallel}{\tfrac{1}{n}} \qquad L\cdot\tfrac{1}{n^2}$$

Ta nierówność nie może zachodzić dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$! ↯.

Z drugiej strony możemy sprawdzić, że $f(x)=\sqrt{x}$ jest na $[0,\infty)$ jednostajnie ciągła.
Zachodzi bowiem nierówność: jeżeli $x \geq y$, to

$$0 \leq \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \qquad \text{(Łatwo sprawdzić)}$$

stąd $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, o ile tylko $|x-y|<\varepsilon^2=\delta_\varepsilon$

(bo jeżeli $|x-y|<\varepsilon^2$, to albo ~~x≥y~~ $0\leq x-y<\varepsilon^2$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)| = f(x)-f(y) = \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} < \varepsilon$$

albo $0\leq y-x<\varepsilon^2$ i tak samo, zamieniając x z y.)

Kilka prostych uwag o tym, jak się ciągłość i jednostajna ciągłość zachowuje, gdy zmieniamy zbiór, na którym je badamy:

1. Jeżeli funkcja f jest ciągła / jednost. ciągła na A, a B jest podzbiorem A, to f jest ciągła / jedn. ciągła na B. (oczywiste z definicji)

2. Jeżeli f jest ciągła na A_1 i na A_2, to nie musi być ciągła na $A_1\cup A_2$:
$f(x)\equiv 0$ na $(-\infty,0]$ $\quad f(x)\equiv 1$ na $(0,\infty)$
nie skleja się do funkcji ciągłej w 0.

Jeżeli jednak A_1 i A_2 zawierają wszystkie swoje punkty skupienia (mówimy wówczas, że są zbiorami domkniętymi), to nie ma tego kłopotu: ~~a ile ztyllo~~

Twierdzenie: Jeżeli $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ jest ciągła / ~~jedn.~~ ~~ciągła~~
$f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ —— " ——

oraz ~~$f_{|A_1}$~~ $\forall_{x \in A_1 \cap A_2}\ f_1(x) = f_2(x)$

i dodatkowo A_1 i A_2 są domknięte, to

$f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana: ~~jako~~

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \end{cases}$$

jest ciągła / na $A_1 \cup A_2$.

Dowód: (Jeżeli x jest punktem izolowanym $A_1 \cup A_2$, to f jest w nim automatycznie ciągła, załóżmy więc, że jest pktem skupienia $A_1 \cup A_2$)

Wybierzmy $x \in A_1 \cup A_2$ i ciąg (x_n) tż. $x_n \longrightarrow x$.
$\wedge A_1 \cup A_2$ $\quad x_n \neq x$

Musimy sprawdzić, czy $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0}\ x_n \in A_1$, to x jest punktem skupienia A_1, więc $x \in A_1$ i ~~f jest w x ciągła.~~

$$\underset{\substack{\Uparrow\\ A_1}}{f(x_n)} = f_1(x_n) \longrightarrow f_1(x) = f(x).$$

Analogicznie, gdy $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0}\ x_n \in A_2$.

Jeżeli zaś nie ma takiego n_0, to dzielimy (x_n) na 2 podciągi (x_{n_k}) i (x_{m_k}) tż. $\forall_k\ x_{n_k} \in A_1$
$x_{m_k} \in A_2$

Oczywiście $\underset{\substack{\Uparrow\\ A_1}}{x_{n_k}} \xrightarrow{k \to \infty} x$, $\underset{\substack{\Uparrow\\ A_2}}{x_{m_k}} \xrightarrow{k \to \infty} x$, co dowodzi, że x jest zarówno punktem skupienia A_1, jak i A_2, więc należy do obu tych zbiorów, a więc i do $A_1 \cap A_2$.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underset{A_1}{=} \lim_{k\to\infty} f_1(x_{n_k}) = f_1(x) \underset{\text{bo } x\in A_1\cap A_2}{=} f_2(x) = \lim_{k\to\infty} f_2(x_{m_k}) \underset{A_2}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k})$$

stąd $\left(f(x_{n_k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\left(f(x_{m_k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mają te same granice, a w sumie dają cały ciąg $f(x_n)$ i z tw. o scalaniu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. □

~~Teraz jednostajną ciągłość. Wiemy już, że~~

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla jednostajnej ciągłości, udowodnimy je jednak nieco później. Na razie kilka ~~zupełnie~~ ~~podstawowych~~ - bardzo ważnych własności funkcji ciągłych.

(148)

Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego o przyjmowaniu wartości pośrednich)

tw. to często zwane jest - mylnie - tw. Darboux, bo własność, o której mówi twierdzenie, powszechnie nazywa się własnością Darboux.

Jean-Gaston Darboux (1842-1917) bardzo wybitny francuski matematyk, geometra, duży wkład w geometrię różniczk. i symplektyczną

Niech funkcja f będzie ciągła na pewnym przedziale I. Jeżeli dla pewnych $x, y \in I$ i stałej C zachodzi

$f(x) < C < f(y)$, to między x a y znajdziemy punkt z taki, że $f(z) = C$.

Tw. Bolzano-Cauchy'ego najczęściej jest używane do szukania pierwiastków funkcji ciągłych (np. wielomianów): ~~zatem~~ Niech badana funkcja f na końcach odcinka $[a,b]$ przyjmuje różne znaki, np $f(a)<0$, $f(b)>0$. Wówczas w $[a,b]$ f ma pierwiastek. Możemy go „tropić" - przybliżać - dzieląc $[a,b]$ w połowie i sprawdzając, jaki jest znak f w $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Jeżeli $f(a_1)>0$, to f ma pierw. w $[a, a_1]$, jeżeli $f(a_1)<0$, to f ma pierwiastek w $[a_1, b]$ itd.

Dowód: załóżmy, bez straty ogólności, że $x<y$.

Oznaczmy $A = \{ w \in [x,y] : f(w) < C \}$

zbiór A jest niepusty (bo $x \in A$) i ogr. z góry (przez y), więc $v = \sup A \in [x,y]$.

Wykażemy, że $f(v) = C$.

W przeciwnym razie mamy 2 możliwości:

① $f(v) < C$ ② $f(v) > C$.

Z ciągłości f w v wiemy, że dla $\varepsilon = |C - f(v)| > 0$ istnieje δ t.ż. $|v-t| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(t)| < |C - f(v)|$.

① $|f(v) - f(t)| < C - f(v)$, dla $t \in (v-\delta, v+\delta)$

~~$|f(v)| - |f(t)|$~~

$\cancel{f(v) - f(t)}$ $f(t) - f(v) \leq |f(v) - f(t)| < C - f(v)$

$$\Downarrow$$

$f(t) < C$ dla $t \in (v-\delta, v+\delta)$ ↯

$$\Downarrow$$

$t \in A$ bo v miało być $\sup A$.

② $|f(v) - f(t)| < f(v) - C$

$\vee$

$f(v) - f(t) \Rightarrow f(t) > C$ dla $t \in (v-\delta, v+\delta)$

$\Rightarrow v$ nie jest najmniejszym ogr. górnym A ↯.

Twierdzenie Weierstrassa (o przyjmowaniu kresów).
Niech funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła na całym odcinku $[a,b]$. Wówczas istnieją $x_m\in[a,b]$ i $x_M\in[a,b]$ takie, że
$$f(x_m)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)=m$$
$$f(x_M)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)=M$$

Innymi słowy: funkcja f, jeżeli jest ciągła na odcinku domkniętym, to przyjmuje na nim, jako wartości, swoje kresy (górny i dolny). W szczególności
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\max_{x\in[a,b]} f(x), \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x)=\min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dowód: Skoro M jest kresem górnym f na $[a,b]$, to „idąc" po wartościach f możemy „podejść" dowolnie blisko M — istnieje ciąg (x_n) ~~tż~~.
$$\forall_n\ x_n\in[a,b] \quad i \quad f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} M.$$
Uwaga: ciąg (x_n) może być od pewnego miejsca stały

Z tw. Bolzano-Weierstrassa wiemy, że z ciągu (x_n) możemy wybrać zbieżny podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ i $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=y$. Wykażemy, że $f(y)=M$, więc możemy przyjąć $x_M=y$. Rzeczywiście, z ciągłości f
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right)=f(y)$$
$$\overset{\parallel}{M}=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
bo $(f(x_{n_k}))_k$ jest podciągiem zbieżnego ciągu $(f(x_n))_n$

Z x_m postępujemy dokładnie tak samo.

Twierdzenie: Jeżeli funkcja f jest jednostajnie ciągła na odcinku otwartym (a,b), to istnieją skończone granice $l = \lim_{x\to a^+} f(x)$ i $r = \lim_{x \to b^-} f(x)$.

Wniosek: Jeżeli f jest jednostajnie ciągła na (a,b), to można ją w sposób ciągły rozszerzyć na $[a,b]$, tj. istnieje funkcja ciągła $\tilde{f}(x)$ $\left(= \begin{cases} f(x) & \text{na } (a,b) \\ l & \text{dla } x=a \\ r & \text{dla } x=b \end{cases} \right)$ taka, że $f(x) = \tilde{f}(x)$ dla $x \in (a,b)$.

Oczywiście jeżeli dla pewnej funkcji f ciągłej na (a,b) istnieje takie rozszerzenie $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$, to $\tilde{f}$ jest jednostajnie ciągła (jako funkcja ciągła na odcinku domkniętym), a więc i f jest jednostajnie ciągła. Dlatego Twierdzenie można uzupełnić do

Twierdzenie': Funkcja f ciągła na (a,b) jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończone granice $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Dowód twierdzenia:

Wykażemy istnienie $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

① Wykażemy, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $\forall_n\, b > x_n > a$, $x_n \to a$ ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę. Stwierdzimy to, wykazując, że $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego:

- funkcja f jest na (a,b) jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- ciąg (x_n) jest zbieżny, więc (war. Cauchy'ego):

$\forall_{\delta>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,m>n_0}\ |x_n-x_m|<\delta.$

Do ustalonego $\varepsilon>0$ dobierzmy δ, a do $\delta - n_0$.

Mamy wówczas

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,m>n_0}$$

$$\left(|x_n-x_m|<\delta\right) \Rightarrow \left(|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon\right), \text{ czyli}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n,m>n_0}\ |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon,$$

a to oznacza dokładnie, że $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

② wykażemy teraz, że dla dowolnego ciągu (x_n) tż. $\forall_n$ $b>x_n>a$, $x_n\to a$ granica ta jest taka sama. Załóżmy bowiem przeciwnie: dla ciągu (x_n) mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l_1$, a dla (y_n), spełniającego te same warunki, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=l_2$ i $l_1\neq l_2$. Skonstruujmy teraz z ciągów (x_n) i (y_n) nowy ciąg (z_n):

$z_{2n}=x_n$, $z_{2n-1}=y_n$. Oczywiście $\forall_n$ $b>z_n>a$, z tw. o scalaniu $z_n\to a$, więc z punktu ① mamy, że $(f(z_n))$ spełnia warunek Cauchy'ego $\Rightarrow$ jest zbieżny.

Z drugiej strony $f(z_{2n})\to l_1$, $f(z_{2n-1})\to l_2$ i $l_1\neq l_2$ – sprzeczność ↯.

Dowód istnienia $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ przebiega dokładnie tak samo.

Twierdzenie (Cantora - Heinego o jednost. ciągłości)
Jeśli funkcja f jest ciągła na odcinku domkniętym [a,b], to jest na nim jednostajnie ciągła.

Heinrich Eduard Heine (1821, Berlin - 1881, Halle)
Studiował w Getyndze u Gaussa i w Berlinie u Dirichleta, tam zetknął się też z Weierstrassem, Kummerem i Kroneckerem, potem pracował w Królewcu (z Jacobim & Kirchhoffem i Neumannem), Bonn i Halle. Zasłużył się wielce teorii równań różniczkowych i klasycznej analizie, jemu zawdzięczamy pojęcie jednostajnej ciągłości.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845, St Petersburg - 1918, Halle) syn duńskiego Niemca i rosyjskiej Niemki, protestanta i katoliczki. studiował w Darmstadt, Zurichu, następnie w Berlinie u Weierstrassa, Kummera i Kroneckera. Początkowo zajmował się głównie teorią liczb, później, pod wpływem Heinego, zajął się analizą - rozwiązał problem jednoznaczności przedstawienia funkcji w postaci szeregu trygonometrycznego. Od 1872 profesor w Halle; w tym czasie zaczął zajmować się tym, co dziś nazywamy teorią mnogości. W 1873 udowodnił ~~równo~~ przeliczalność $\mathbb{Q}$, przeliczalność liczb algebraicznych, nieprzeliczalność $\mathbb{R}$. Rok później wykazał równoliczność $[0,1]$ z $\mathbb{R}^n$. Kilka lat później wprowadził pojęcie mocy zbioru, liczb porządkowych, zbioru dobrze uporządkowanego itd - jak Państwo widzą, zawdzięczają mu Państwo większość „Wstępu do matematyki".

<u>Dowód twierdzenia</u>: Załóżmy przeciwnie, że f nie jest jednostajnie ciągła - a więc

$$\sim \left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in[a,b]} \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\right)$$

czyli $\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x,y\in[a,b]} \ |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$.
W związku z tym, biorąc $\delta=\frac{1}{n}$, znajdziemy $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ takie $x_n, y_n\in[a,b]$, że $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, ale $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$.

Z ciągu (x_n) możemy wybrać podciąg zbieżny $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \underset{[a,b]}{\underset{\cap}{x_0}}$. ~~Oczywiście~~ Skoro $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$

to $\underset{\underset{x_0}{\downarrow}}{x_{n_k}} - \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n_k}} \leq y_{n_k} \leq \underset{\underset{x_0}{\downarrow}}{x_{n_k}} + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n_k}} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$.

Z drugiej strony f jest ciągła w x_0, więc

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x_0)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}) \quad (= f(x_0))$$

$$\Downarrow$$

$\lim\limits_{k\to\infty}[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$. To jednak jest niemożliwe, gdyż $\forall_k |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. $\lightning$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech funkcja f będzie ciągła na odcinku $[a,b]$ i różnowartościowa na tym odcinku. Wówczas a) f jest ściśle monotoniczna na $[a,b]$
b) ~~f^{-1}~~ Funkcja odwrotna do f, oznaczana f^{-1}, jest ciągła na $f([a,b])$.

<u>Uwaga</u>: Co wiemy o $f([a,b])$, gdy f jest na $[a,b]$ ciągła? Oczywiście $f([a,b])$ jest zawarte w przedziale (ew. prostej lub półprostej) $[\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$.
Z tw. Weierstrassa o osiąganiu kresów oba końce tego przedziału są wartościami f w pewnych punktach przedziału $[a,b]$, w szczególności są skończone. Z tw. Bolzano-Cauchy'ego wiemy natomiast, że, skoro $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$ jest wartością funkcji f w pewnym $x_m \in [a,b]$, a $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$ w pewnym x_M,

to na przedziale o końcach w x_m i x_M (zawartym oczywiście w $[a,b]$) osiągane są wszystkie wartości pośrednie pomiędzy m a M. Wniosek:

$$f([a,b]) = [m, M], \text{ gdzie } m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \left(= \min_{x\in[a,b]} f(x)\right)$$
$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \left(= \max_{x\in[a,b]} f(x)\right).$$

Zatem obrazem odcinka domkniętego w funkcji ciągłej jest zawsze odcinek domknięty!

Dowód twierdzenia wersja 1

Zauważmy najpierw, że jeżeli udowodnimy a), to z b) pójdzie łatwo: funkcja odwrotna do funkcji ściśle monotonicznej jest ściśle monotoniczna, a ~~~~ jej obrazem jest przedział $[a,b]$ – a udowodniliśmy już, że funkcja monotoniczna, której obrazem jest przedział, jest ciągła. Wykażmy zatem a).

Trzeba wykazać, że jeżeli $x<y<z$, to ① $f(x) < f(y) < f(z)$ lub ② $f(x) > f(y) > f(z)$.

Załóżmy, że $f(x) < f(z)$, ale ① nie zachodzi, czyli albo $f(y) < f(x)$, albo $f(y) > f(z)$

$f(y) < f(x) < f(z)$
z tw Bolzano-Cauchy'ego w przedziale (y,z) jest $\tilde{x}$ t że $f(\tilde{x}) = f(x)$ ↯ z różnowartościowością

$f(y) > f(z) > f(x)$
w przedziale (x,y) jest $\tilde{z}$ t że $f(\tilde{z}) = f(z)$ ↯

Jeżeli $f(x) > f(z)$, ale ② nie zachodzi, dowód jest identyczny: albo $f(y) > f(x)$, albo $f(y) < f(z)$

$f(y) > f(x) > f(z)$

$f(y) < f(z) < f(x)$

sprzeczność z tw. Bolzano-Cauchy'ego i różnowartościowością f mieć. Pozostałe znajdą sami.

Dowód twierdzenia - wersja 2 (tylko punkt b), bez a))

Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest różnowartościowa i ciągła na $[a,b]$, ale $f^{-1}: f([a,b])\to[a,b]$ nie jest ciągła. Oznacza to, że istnieje ciąg zbieżny w $f([a,b])$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall_n z_n\in f([a,b])$, $z_n\to z_0$, ale $f^{-1}(z_n)\not\to f^{-1}(z_0)$ (tj $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(z_n)$ albo nie istnieje, albo istnieje, ale jest różna od $f^{-1}(z_0)$).

Oznaczmy $\forall_n\ x_n=f^{-1}(z_n)$, $x_0=f^{-1}(z_0)$. Wiemy, że $x_n\not\to x_0$, więc istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że dla pewnego $\varepsilon>0$ (i wszystkich k) $|x_{n_k}-x_0|\geqslant\varepsilon$. (*)

Z ciągu $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ możemy, z tw. Bolzano-Weierstrassa, wybrać podciąg zbieżny $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ do jakiegoś $\underset{[a,b]}{\tilde{x}_0 \in}$).

Oczywiście z (*) mamy $\tilde{x}_0\neq x_0$.

Funkcja f jest ciągła w x_0, więc

$$f(\tilde{x}_0)=f\left(\lim_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}\right)=\lim_{l\to\infty}f(x_{n_{k_l}})=$$

$$=\lim_{l\to\infty}z_{n_{k_l}}=\lim_{n\to\infty}z_n=z_0=f(x_0),\ \text{choć } x_0\neq\tilde{x}_0$$

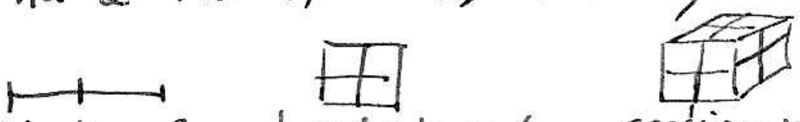
$\lightning$ z różnowartościowością.

W dowodach twierdzeń: Weierstrassa o kresach
Cantora-Heinego o jedn. ciągłości
i punktu b) ostatniego twierdzenia
jedyna własność odcinka $[a,b]$, jaka nam była potrzebna, to to, że zachodzi na nim twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: z każdego ciągu punktów odcinka $[a,b]$ można wybrać podciąg zbieżny. Są inne zbiory o tej własności: na przykład $[a,b] \cup [c,d]$, gdzie $b<c$ (prościutkie zadanie). Na takiej sumie 2 odcinków domkniętych również będą zachodzić 3 wspomniane twierdzenia. Prowadzi to do bardzo ważnej definicji:

<u>Def</u>: Mówimy, że zbiór A jest <u>zwarty</u>, jeżeli z każdego ciągu (x_n) elementów A możemy wybrać podciąg zbieżny.

By ta definicja miała sens, musimy wiedzieć, co to znaczy, że ciąg elementów A jest zbieżny. Umiemy to określić, gdy np. A jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Jakie podzbiory $\mathbb{R}^n$ są zwarte?

Łatwo można wykazać, że zwarta jest kostka $K=[-M,M]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \le M \text{ dla } i=1,\dots,n\}$ — możemy dla niej w zasadzie powtórzyć dowód tw. Bolzano-Weierstrassa: mamy w K ciąg (x_n); dzielimy K na 2^n kostek, dzieląc każdą krawędź na pół



odcinek na 2 kwadrat na 4 sześcian na 8 itd.

w co najmniej jednej z małych kostek jest ∞-wiele wyrazów; tę kostkę dzielimy znów na 2^n kostek itd, dokładnie jak w dowodzie tw. B.-W.

Okazuje się, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. Dla wygody podam tu równoważną, ale ciut uproszczoną def. zbioru domkniętego: ~~jeżeli~~
A jest domknięty $\Leftrightarrow$ jeżeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}^n$) i $\forall_n\ x_n \in A$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.

Tu udowodnię tylko, że jeżeli zbiór jest domknięty i ograniczony, to jest zwarty (w drugą stronę też łatwo, ale nie chcę odbierać chleba topologom).

Jeżeli A jest ograniczony, to da się zamknąć w dostatecznie dużej kostce postaci $[-M,M]^n$. Weźmy teraz ciąg (x_n) elementów A. Jest to też ciąg elementów kostki $[-M,M]^n$, więc można z niego wybrać podciąg (x_{n_k}) zbieżny w $[-M,M]^n$.
Wiemy więc, że (x_{n_k}) jest zbieżny i $\forall_k\ x_{n_k} \in A$
$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in A$, bo A domknięty. Tak więc z każdego ciągu (x_n) elementów A można wybrać podciąg zbieżny do elementu A (czyli w żargonie - zbieżny w A). $\square$

Na koniec sformułujmy wspomniane 3 twierdzenia na zbiorach zwartych:

Tw Weierstrassa o kresach:

K - zwarty, f ciągła na K. Wówczas istnieją $x_m, x_M \in K$ takie, że $f(x_m) = \inf_{x \in K} f(x)$

$$f(x_M) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Cantora-Heinego o jednost. ciągłości

Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest na nim jednostajnie ciągła.

O ciągłości funkcji odwrotnej

Jeżeli f jest różnowartościowa i ciągła na zbiorze zwartym K, to $f^{-1}: f(K) \to K$ jest ciągła.

Zadanie: Obraz zbioru zwartego w funkcji ciągłej jest zbiorem zwartym.