Dla nierówność (*) jest w odwrotną stronę, dostajemy $\sin x = x - \underbrace{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{\wedge\, 0} - \dots > x$

i analogicznie

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!},$$

ale po podzieleniu przez x mamy i tak

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\forall_{\substack{b_n \to 0 \\ b_n \neq 0}}$ $1 - \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{b_n^2}{6}} < \frac{\sin b_n}{b_n} < 1$ i z tw. o 3 ciągach $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin b_n}{b_n} = 1$.

zatem $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

W zasadzie skorzystaliśmy (i udowodniliśmy niemal)

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Jeżeli dla x bliskich x_0, $x \neq x_0$ zachodzą nierówności

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad (*)$$

oraz $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = g$, to również

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g.$$

Dowód: Wprost z def. Heinego i tw. o 3 ciągach

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \forall_{\substack{(b_n)\to x_0 \\ b_n \neq x_0}} \lim_{n\to\infty} f(b_n) = g$$

i analogicznie $\lim h(b_n) = g$

mamy jednak

$$\underset{\downarrow \atop g}{f(b_n)} \leq g(b_n) \leq \underset{\downarrow \atop g}{h(b_n)}$$ dla dost. dużych n (bo wtedy b_n są dost. blisko x_0, by zachodziło (*))

stąd $\lim_{n\to\infty} g(b_n) = g$ ← dla dowolnego $(b_n) \to x_0$, $b_n \neq x_0$. □

Twierdzenie to ma – podobnie jak tw. o trzech ciągach – z granicami nieskończonymi:

Twierdzenie: Jeżeli dla x bliskich x_0, $x \neq x_0$ zachodzi nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

to

a) jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, to $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

b) jeżeli $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, to $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Dowód: tak samo jak poprzednio korzystamy z def. Heinego i odp. wersji tw. o 3 ciągach. Szczegóły pominę, bo to nudne.

Tak samo dowodzi się

Tw. o arytmetycznych własnościach granicy

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

o ile granice po prawej stronie równości istnieją i obliczywszy je, nie dostaniemy wyrażenia nieoznaczonego.

Dowód znów polega na odwołaniu się do def Heinego i odp. twierdzenia dla ciągów

Dalsze przykłady

$f(x) = \frac{1}{x}$ na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Czy istnieje $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$?

Weźmy $b_n = \frac{1}{n}$: $b_n \to 0$, $b_n \neq 0$, więc to dobry ciąg do war. Heinego; $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = +\infty$

Biorąc jednak $c_n = -\frac{1}{n}$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{1/n} = -\infty$.

Dostajemy różne granice dla różnych ciągów dążących do zera, więc granica $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nie istnieje.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$b_n = \frac{1}{2n\pi}$ $\quad b_n \to 0$, $b_n \neq 0$; $\Rightarrow f(b_n) = \sin 2\pi n = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$c_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\quad c_n \to 0$, $c_n \neq 0$ $\quad f(c_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

więc nie istnieje $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Granice jednostronne

Niech $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Liczba g jest lewo (ew. prawo-) stronną granicą funkcji f w x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

- x_0 jest punktem skupienia $A \cap (-\infty, x_0)$ (odp. $A \cap (x_0, \infty)$) (czyli istnieją ciągi el. A mniejszych (większych) od x_0, zbieżne do x_0)
- dla każdego takiego ciągu (b_n) (tj $\forall_n\, b_n < x_0$ $(>)$, $b_n \in A$, $b_n \longrightarrow x_0$)

$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = g$

ew. wersja Cauchy'ego: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

(odp $0 < x - x_0 < \delta$)

Zapisujemy to: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$ (lewostronna)

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g$ (prawostronna)

(124)

Przykład: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

więc $f(x) = \frac{1}{x}$ ma w 0 granice jednostronne, tylko różne.

Funkcja $\sin\frac{1}{x}$ nie ma w zerze granic jednostronnych (wykazaliśmy, że nie istnieje $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$, ale wystarczy wziąć nasze dwa ciągi b_n i c_n z minusem, by wykazać, że nie istnieje $\lim_{x\to 0^-} \sin\frac{1}{x}$).

Tw. o scalaniu

Niech funkcja f będzie określona na zbiorze A; $A = A_1 \cup A_2$, a x_0 jest punktem skupienia zarówno A_1, jak i A_2.
Funkcja f ma w x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{A_1}$ oraz $f|_{A_2}$ mają w x_0 granice i to obie równe g.

D-d: Jeżeli istnieje $\lim_{x\to x_0} f$, to oczywiście istnieją też granice $\lim_{x\to x_0} f|_{A_1}$ i $\lim_{x\to x_0} f|_{A_2}$ – i są równe $\lim_{x\to x_0} f$ – w odp. def. Heinego ograniczamy po prostu dopuszczalny zbiór ciągów, biorąc tylko ciągi o el. w A_1 lub w A_2.
Jeżeli zaś weźmiemy dowolny ciąg (b_n) elementów $A\setminus\{x_0\}$, to możemy go rozbić na podciągi elementów z A_1 i elementów z A_2 (któryś może być skończony, nie szkodzi).

(b_{k_n}) i (b_{l_n}). Jeżeli oba są nieskończone, to z założenia $f(b_{k_n}) \to g$, $f(b_{l_n}) \to g$ i z tw. o scaleniu dla ciągów (podciągi te w sumie dają cały ciąg) $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = g$.
Jeżeli któryś podciąg ma tylko skończenie wiele elementów, to znaczy że (b_n) od pewnego momentu ma wyrazy tylko w A_1 (lub w A_2) i znów z zał. i def Heinego $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = g$. ▷

Wniosek: Niech x_0 będzie punktem skupienia zarówno $A \cap (-\infty, x_0)$, jak i $A \cap (x_0, \infty)$.
Wówczas $f: A \to \mathbb{R}$ ma w x_0 granicę wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w x_0 obie granice jednostronne i są one równe. (są wówczas równe $\lim_{x\to x_0} f$)

Dowód: wystarczy wziąć $A_1 = A \cap (-\infty, x_0]$,
$A_2 = A \cap (x_0, \infty)$.

Uwaga: Granice jednostronne f w x_0 to po prostu granice $f|_{A\cap(-\infty,x_0)}$ oraz $f|_{A\cap(x_0,\infty)}$ w x_0, więc zachodzą dla nich te same twierdzenia o własnościach arytm. (i inne tw. o granicach).

(126)

Jeszcze 2 twierdzenia, pierwsze żywcem z teorii ciągów, dowód - zadanie.

Tw. (warunek Cauchy'ego):
Funkcja f ma w x_0 granicę skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)}\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Tw. (do kompletu własności arytmetycznych) o granicy złożenia 2 funkcji:

Chcemy zbadać istnienie i wartość $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ gdy umiemy liczyć granice f i g.
Aby wszystkie napisy miały sens, założymy, że:
- dziedzina f zawiera zbiór wartości g (żeby miało sens złożenie $f(g(\cdot))$)
- g ma w x_0 granicę równą G (w szczeg. x_0 jest punktem skupienia dziedziny g)
- G jest punktem skupienia dziedziny f
- f ma w G granicę równą F.
- dla x bliskich x_0 (i różnych od) funkcja g przyjmuje wartości różne od G.

Wówczas istnieje $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ i jest równa F.
Dowód: Natychmiast z def. Heinego.

Z pojęciem granicy funkcji blisko związane ~~jest~~ są pojęcia granic: górnej i dolnej funkcji. (w zadanym punkcie x_0). Nim je wprowadzimy, ~~zdefini~~ podamy jeszcze jedną ważną definicję:

<u>Kresem górnym</u> (odp. <u>dolnym</u>) funkcji f na zbiorze A nazywamy kres górny (dolny) zbioru wartości f, gdy argumenty należą do A. Inaczej mówiąc,

- liczba $g \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym (dolnym) funkcji f na zb. $A \neq \emptyset$, gdy
  a) $\forall_{x \in A} \ g \geq f(x)$ $\quad (g \leq f(x))$
  b) $\forall_{h<g} \ \exists_{y \in A} \ h < f(y)$ $\quad (h > f(y))$
- jeżeli nie ma liczby g spełniającej a) i b), to mówimy, że kresem górnym (dolnym) f jest $+\infty$ $(-\infty)$.

Kres górny f na zbiorze A oznaczamy $\sup\limits_{x \in A} f$, kres dolny – $\inf\limits_{x \in A} f$

← infimum (nie INFINUM) tylko INFIMUM

↑ supremum

Niech x_0 będzie punktem skupienia dziedziny funkcji f.

<u>Def</u>: ~~G jest~~ $G \in [-\infty, \infty]$ jest granicą górną funkcji f przy $x \to x_0$ gdy

a) dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dążącego do x_0 i takiego, że $\forall_n \ x_n \neq x_0$ mamy $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq G$, o ile tylko ta granica istnieje.

b) dla dowolnej $H < G$ znajdziemy ciąg $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x_0$, $\forall_n \ y_n \neq x_0$, taki, że $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) > H$

(czyli G jest najmniejszą liczbą o własności a).)

Granicę górną oznaczamy $\limsup_{x \to x_0} f(x)$

Analogicznie definiujemy granicę dolną $\liminf_{x \to x_0} f(x)$.

Można te definicje sformułować tak: niech B oznacza zbiór wszystkich możliwych granic ciągów postaci $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$.

Wówczas
$$\limsup_{x \to x_0} f = \sup B$$
$$\liminf_{x \to x_0} f = \inf B.$$

Uwaga: ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ może nie mieć granicy, ale wtedy można z niego wybierać podciągi – znów postaci $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ – które mają już granice (i to różne), więc $B \neq \emptyset$.

Wniosek: Dla dowolnego x_0 – punktu skupienia dziedziny funkcji f – istnieją $\limsup_{x \to x_0} f$ oraz $\liminf_{x \to x_0} f$ (podczas gdy $\lim_{x \to x_0} f$ niekoniecznie). Co więcej, ~~z def Heinego~~
$$\liminf_{x \to x_0} f \leq \limsup_{x \to x_0} f$$
a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lim_{x \to x_0} f$ – wówczas
$$\liminf_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} f = \limsup_{x \to x_0} f$$
(natychmiast z def. Heinego).

Wykażemy teraz, że nie tylko $\limsup_{x \to x_0} f$ (129)
jest kresem górnym możliwych granic
ciągów postaci $(f(x_n))$, ale że istnieje
ciąg $z_n \to x_0$, $z_n \neq x_0$, taki, że $f(z_n) \to \limsup_{x \to x_0} f$

Przyjmijmy najpierw, dla uproszczenia, że $g = \limsup_{n \to x_0} f \in \mathbb{R}$.
~~Niech z_1 będzie dowolnym punktem dziedziny f.~~
Niech $(z_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem
zbieżnym do x_0 takim, że $\forall_n \; z_{1,n} \neq x_0$ oraz
że istnieje $g_1 = \lim_{n \to \infty} f(z_{1,n})$.

Jeżeli $g_1 = g$, to kładziemy $z_n = z_{1,n}$ i koniec
w przeciwnym przypadku $g_1 < g$, więc
również $\frac{g_1+g}{2} < g$ i z def. limsup
istnieje ciąg $(z_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $z_{2,n} \to x_0$
$\forall_n \; z_{2,n} \neq x_0$
oraz $f(z_{2,n}) \to g_2 > \frac{g_1+g}{2}$

Jeżeli $g_2 = g$, to $z_n = z_{2,n}$ i koniec, w p.p.
znajdujemy $(z_{3,n})_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $z_{3,n} \to x_0$
$z_{3,n} \neq x_0$
$f(z_{3,n}) \to g_3 > \frac{g+g_2}{2}$
i tak dalej – tworzymy
ciągi $(z_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tż. $z_{k,n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$
$\forall_n \; z_{k,n} \neq x_0$
$f(z_{k,n}) \longrightarrow g_k$

Albo $\exists_{k \in \mathbb{N}} \; g_k = g$ i koniec, albo dostaliśmy
„ciąg ciągów" $(z_{k,n})$.

Zauważmy, że $g_k \xrightarrow[k \to \infty]{} g$, gdyż $0 < g - g_k < \frac{g - g_{k-1}}{2} <$
$< \frac{g - g_{k-2}}{2^2} < \ldots < \frac{g - g_1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Skoro $f(z_{k,n}) \to g_k$,
to $\exists_{n_k \in \mathbb{N}} \; f(z_{k,n_k}) \in (g_k - 2^{-k}; g_k + 2^{-k})$
(istnieje wyraz k-tego ciągu bardzo bliski g_k)

Połóżmy $z_k = z_{k,n_k}$. Wówczas

$$g-0 \leftarrow g_k - 2^{-k} < f(z_k) < g_k + 2^{-k} \longrightarrow g+0$$

i z tw. o 3 ciągach $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = g$. □

Analogicznie możemy dowieść, że istnieje ciąg $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ~~[illegible]~~ $w_n \to x_0$, $\forall_n \, w_n \neq x_0$ taki, że $\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \liminf_{x\to x_0} f(x)$.

Kilka przykładów:

- $\sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{x} = +\infty$, $\inf_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje, $\limsup_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\liminf_{x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sin x = 1$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} \sin x = 1$
- $\liminf_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = -1$, $\limsup_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = 1$

  (i oczywiście $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje, o czym już wiedzieliśmy).
- $\limsup_{x\to\infty} \sin x = 1$, $\liminf_{x\to\infty} \sin x = -1$.

~~Nie pamiętam z czyz w sposób ścisły~~

Tak, jak definiowaliśmy ciągi monotoniczne, możemy też zdefiniować funkcje monotoniczne:

Funkcja f jest
a) rosnąca
b) niemalejąca
c) nierosnąca
d) malejąca
, jeżeli dla dowolnych x, y należących do dziedziny f nierówność $x < y$ pociąga za sobą nierówność
a) $f(x) < f(y)$
b) $f(x) \le f(y)$
c) $f(x) \ge f(y)$
d) $f(x) > f(y)$.

Wszystkie te 4 typy funkcji obejmujemy wspólną nazwą funkcji monotonicznych

Na przykład funkcja $\frac{1}{x}$ określona na $(0, \infty)$ jest malejąca, na $(-\infty, 0)$ też, ale na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ już nie: $-2 < 2$, ale $f(-2) < f(2)$, a nie odwrotnie, jak by było dla funkcji malejącej.

Funkcje monotoniczne mają wiele szczególnych własności ważnych dla analizy matematycznej, w większości - konsekwencji poniższego twierdzenia

<u>Twierdzenie</u> (o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej)

Niech f będzie funkcją monotoniczną, a x_0 - punktem skupienia jej dziedziny A. Jeżeli tylko x_0 jest punktem skupienia $A \cap (-\infty, x_0)$ (a więc można liczyć granicę lewostronną), to $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ istnieje. Analogicznie, jeżeli x_0 jest punktem skupienia $A \cap (x_0, +\infty)$, to istnieje $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Innymi słowy: funkcja monotoniczna ma granice lewo- i prawostronne we wszystkich punktach, w których granice te mają sens.

Udowodnimy to twierdzenie przy założeniu, że f jest niemalejąca, a x_0 jest punktem skupienia $A \cap (-\infty, x_0)$. (pozostałe przypadki dowodzi się dokładnie tak samo).

to jest zbiór niepusty - dlaczego?

Oznaczmy $B = \{ f(x) : x \in A,\ x < x_0 \}$, $g = \sup B$. Wykażemy, że $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$, ~~znajdując ciąg $(x_n) \to x_0$ rosnący taki, że $f(x_n) \to g$.~~

Skoro $g = \sup B$, to $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ istnieje ~~$y \in A$~~ $y_k \in A$, $y_k < x_0$ taki, że ~~$f(y_k)$~~

$$g - \frac{1}{k} < f(y_k) \le g$$

O ciągu (y_k) nie wiemy nic ponad to, że $\forall_k \ y_k < x_0$, $y_k \in A$. Z tego jednak, że f jest niemalejąca, wiemy, że

$$\forall_{x_0 > x > y_k} \quad g - \frac{1}{k} < f(y_k) \overset{\text{bo } x > y_k}{\le} f(x) \overset{\text{bo } f(x) \in B}{\le} g \qquad (*)$$

~~Jeżeli więc przyjmiemy $x_k = \max(y_k, x_k$~~

Wybierzmy teraz dowolny ciąg (z_n) elementów $A \cap (-\infty, x_0)$ zbieżny do x_0.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wykażemy, że istnieje n_ε takie, że $\forall_{n > n_\varepsilon}$

$g - \varepsilon < f(z_n) \leq g$ (a więc $|f(z_n) - g| < \varepsilon$), – co oznacza, że $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = g$.

Wybierzmy k takie, by $\frac{1}{k} < \varepsilon$ (np $k = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$)

Wówczas

$$g - \varepsilon < g - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq g.$$

Skoro $y_k < \cancel{g}\, x_0$, to wyrazy ciągu z_n, dla dużych n, są większe niż y_k (bo $z_n \to x_0$), precyzyjniej:

$$\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \quad y_k < z_n < x_0$$

ale z tego wynika, że (z ~~faktu~~, że f niemalejąca, patrz (*))

$\exists_n \ \forall_{n > n_0}$

$$g - \varepsilon < g - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq f(z_n) < g$$

Szybkie podsumowanie: definicja i własności funkcji trygonometrycznych. 134

Definicja: Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Własności

1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (wzór Eulera)
2. jeżeli $z \in \mathbb{R}$, to również $\sin z$ i $\cos z$ są rzeczywiste
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
4. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
5. dla każdego ciągu (z_n) t.ż. $z_n \to 0$, $\forall_n\, z_n \neq 0$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1$
   (czyli $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$)
6. $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$
7. $\sin z \pm \sin w = 2 \sin \frac{z \pm w}{2} \cos \frac{z \mp w}{2}$, $\cos z + \cos w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \cos \frac{z-w}{2}$
   $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$
8. $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$
   $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$
   dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ (ale już nie $\forall_{x,y \in \mathbb{C}}$!)
9. istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia π, że $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ i zarówno $\sin x$ jak i $\cos x$ są dodatnie dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
10. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
11. na przedziale $(0, \pi)$ sinus jest dodatni
12. na przedziale $[0, \pi]$ cosinus jest malejący, na $[\pi, 2\pi]$ - rosnący
    sinus jest rosnący na $[0, \frac{\pi}{2}]$ oraz na $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$, a malejący na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$
13. $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$
14. $\forall_{z \in \mathbb{C}}$ $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
15. dla każdej pary $x, y \in \mathbb{R}$ spełniającej $x^2 + y^2 = 1$ istnieje dokładnie jedno $t \in [0, 2\pi)$ takie, że $x = \cos t$, $y = \sin t$.

(16) $\forall_{z\in\mathbb{C}}$ zachodzą równości

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

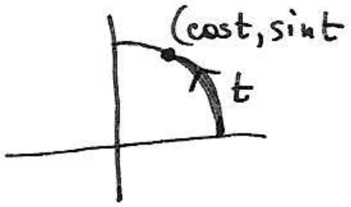
def: $\operatorname{tg} \cancel{x} = \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$

(17) $t < \operatorname{tg} t$ dla $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

(18) $\operatorname{tg} t > 0$ dla $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{tg} t < 0$ dla $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z$ itd...

(19) Z (3) wynika, że ~~(sinz,~~ $(\cos t, \sin t)$ leży na okręgu jednostkowym. (dla $t \in \cancel{\mathbb{R}}$ $[0,2\pi)$). Wówczas długość łuku tego okręgu od punktu $(1,0)$ do $(\cos t, \sin t)$, w kier. ↺, liczona jako supremum długości łamanych wpisanych w ten łuk, jest równa t.



<u>Ciągłość funkcji</u>

<u>Definicja</u>: Mówimy, że funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in A$, jeżeli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takiego, że $\forall_n\, x_n \in A$ oraz $x_n \to x_0$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \quad (*)$$

<u>Uwaga</u>: od ciągu (x_n) nie wymagamy, by $x_n \neq x_0$.

<u>Uwaga</u>: Niech $x_0 \in A$ <u>nie będzie</u> punktem skupienia A. Wówczas <u>nie ma</u> ciągów (x_n) zbieżnych do x_0 takich, że $\forall_n\, x_n \neq x_0$. Wynika stąd (zadanie), że jeżeli $x_n \to x_0$, ~~$\forall_n$~~ $x_n \in A$ $x_n \in A$, to od pewnego miejsca ciąg (x_n) jest stały i jego wyrazy są równe x_0. Dla takich ciągów warunek $(*)$ jest oczywiście spełniony. <u>Wniosek</u>: W punktach $x_0 \in A$, które nie są punktami skupienia A (nazywamy je wówczas punktami izolowanymi) funkcja f jest automatycznie ciągła.

A co, jeżeli x_0 jest punktem skupienia A? Wówczas z $(*)$ wynika, że funkcja f ma w x_0 granicę i $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Zachodzi też odwrotna implikacja: jeżeli x_0 jest punktem skupienia A, f ma w x_0 granicę i granica ta jest równa $f(x_0)$, to dla dowolnego ciągu (x_n) t.ż. $\forall_n\, x_n \in A$, $x_n \to x_0$ zachodzi $(*)$. ~~Możemy bowiem rozo~~ Mamy bowiem dwie możliwości: albo w ciągu (x_n) x_0 występuje tylko skończenie wiele razy – możemy wtedy wyrzucić te wyrazy z (x_n) (i $f(x_n)$) bez zmiany granicy obu ciągów, więc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ z założenia o granicy.

Jak „chudego" otoczenia punktu $f(x_0)$ nie wybierzemy (u nas otoczenie to to przedział $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$, zawsze znajdziemy takie otoczenie punktu x_0 (u nas $(x_0-\delta, x_0+\delta)$), że funkcja f na tym otoczeniu punktu x_0 przyjmuje wartości leżące w zadanym na początku otoczeniu $f(x_0)$.

Dowód: Musimy oddzielnie rozpatrzeć przypadki, gdy x_0 jest punktem izolowanym A i gdy jest punktem skupienia A. W tym pierwszym przypadku istnieje δ_0 takie, że jedynym punktem z A w przedziale $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ jest punkt x_0 (dlaczego? – proste zadanie). Możemy wówczas, dla dowolnego $\varepsilon>0$, wziąć $\delta=\delta_0$ – wówczas jeżeli $x\in A$ i $|x-x_0|<\delta$, to $x=x_0$ i $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$.

Odwrotnie, jeżeli x_0 jest punktem izolowanym A, to funkcja f jest w x_0 ciągła, niezależnie od tego, czy warunek z tezy jest spełniony (co, jak wykazaliśmy przed chwilą, ma miejsce), czy nie.

Jeżeli natomiast x_0 jest punktem skupienia i f jest ciągła w x_0, to, z poprzedniego twierdzenia, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, co, z def Cauchy'ego granicy funkcji, oznacza, że $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}$ tż. jeżeli $0<|x-x_0|<\delta$, to $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

oczywiście jeżeli $|x-x_0|=0$, to $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$, więc

jeżeli $0\le|x-x_0|<\delta$, to $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

zawsze spełnione, więc niepotrzebne.

Odwrotnie, jeżeli zachodzi warunek z tezy twierdzenia, to widzimy od razu, że f ma w x_0 granicę równą $f(x_0)$ (z def. Cauchy'ego granicy), jest więc w x_0 ciągła. □

Z własności arytmetycznych granicy mamy od razu:

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli funkcje $f, g : A \to \mathbb{R}$ są ciągłe w $x_0 \in A$, to ciągłe w x_0 są również $f+g$, $f \cdot g$, $f-g$ i $\frac{f}{g}$, o ile tylko $g(x_0) \neq 0$.

Z operacji na funkcjach zostało nam jeszcze ich składanie:

<u>Twierdzenie</u>: Załóżmy, że funkcja g jest ciągła w x_0, dziedzina funkcji f zawiera zbiór wartości funkcji g (by można je było składać) i f jest ciągła w $g(x_0)$. Wówczas $f \circ g$ jest ciągła w x_0.

<u>Dowód</u>: Skorzystamy z otoczeniowej charakteryzacji ciągłości: Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Skoro f jest ciągła w $g(x_0)$, to istnieje $\tilde{\delta} > 0$ t.ż. jeżeli

$$|z - g(x_0)| < \tilde{\delta}, \text{ to } |f(z) - f(g(x_0))| < \varepsilon. \quad (*)$$

Podobnie, istnieje $\delta > 0$ t.ż. jeżeli $|x - x_0| < \delta$, to

$$|g(x) - g(x_0)| < \tilde{\delta} \overset{(*)}{\Longrightarrow} |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon. \quad \square$$

Przykłady funkcji ciągłych:

| Uwaga - definicja:
| Funkcja f jest ciągła na zbiorze A $\iff$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

① funkcja stała
② $f(x) = x$
} na całym $\mathbb{R}$, wprost z definicji

z ①, ② + własności arytmetyczne

③ każdy wielomian jest ciągły na całym $\mathbb{R}$.

④ funkcje wymierne są ciągłe wszędzie poza miejscami zerowymi mianownika

⑤ e^x, $\ln x$ są ciągłe we wszystkich punktach swojej dziedziny (dowiedliśmy tego wprowadzając te funkcje)

⑥ a^x jest, dla $a>0$, ciągła we wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jako złożenie: $\exp(x \cdot \ln a)$.

⑦ podobnie, x^a jest dla dowolnej $a \in \mathbb{R}$ ciągła we wszystkich $x \in (0, \infty)$. Dla $a>0$ jest ciągła również w $x=0$: jeżeli $x_n \to 0^+$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^a = 0$. Dlaczego? Jeżeli <1, to $0 < x_n^a < x_n^{\frac{1}{k}}$ dla $k = [\frac{1}{a}]+1$ (wtedy $\frac{1}{k} < a$).

gdyby $\lim x_n^{\frac{1}{k}} \neq 0$ (w szczególności gdyby nie istniał), to znaleźlibyśmy podciąg $x_{n_m}^{1/k} \longrightarrow g \neq 0$. Wtedy

g ← być może ∞.

$$x_{n_m} = \left(x_{n_m}^{\frac{1}{k}}\right)^k \longrightarrow g^k \neq 0 \;\lightning$$

$$\downarrow$$
$$0$$

Stąd $0 < x_n^a < x_n^{\frac{1}{k}} \to 0$ i z tw. o 3 ciągach $x_n^a \to 0$.

⑧ $\sin x$ i $\cos x$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Wynika to z nierówności $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ i $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$

Np. dla sinusa: wykażemy, że jest ciągły w $x_0 \in \mathbb{R}$. Z otoczeniowej charakt. ciągłości mamy wykazać, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ tż jeżeli $|x-x_0|<\delta$, to $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Wystarczy wziąć $\delta = \varepsilon$, wtedy jeżeli $|x-x_0|<\varepsilon$, to $|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0| < \varepsilon$.

Twierdzenie: Funkcja monotoniczna, której obrazem jest przedział, półprosta lub prosta, jest ciągła we wszystkich punktach swojej dziedziny.

Dowód: Załóżmy dla ustalenia uwagi, że f jest niemalejąca, a jej dziedziną jest A. f jest automatycznie ciągła we wszystkich punktach izolowanych A, musimy więc zbadać ciągłość f w punktach skupienia zbioru A.

Jeżeli x_0 jest punktem skupienia A, to można w nim obliczyć lewo- lub prawostronną granicę f. (albo i obie). Jeżeli x_0 jest punktem skupienia $A \cap (-\infty, x_0)$, to możemy obliczać $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Skoro f jest ~~monoto~~ niemalejąca, to granica ta istnieje. Oczywiście $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$ (bo $\forall_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0)$). Jeżeli tu nie ma równości, to w przedziale $(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), f(x_0))$ nie ma żadnej wartości funkcji f — w zbiorze wartości jest dziura (bo dla $x > x_0$ $f(x) \geq f(x_0)$). To jest niemożliwe — w odcinku,