| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | $a_0b_0$ 0 | $a_1b_0$ 2 | $a_2b_0$ 5 | $a_3b_0$ 9 | |
| $b_1$ | $a_0b_1$ 1 | $a_1b_1$ 4 | $a_2b_1$ 8 | $a_3b_1$ | |
| $b_2$ | $a_0b_2$ 3 | $a_1b_2$ 7 | $a_2b_2$ | $a_3b_2$ | |
| $b_3$ | $a_0b_3$ 6 | $a_1b_3$ | $a_2b_3$ | $a_3b_3$ | |
| $\vdots$ | | | | | |

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \overbrace{(a_0b_0)}^{p_0} + \overbrace{(a_0b_1+a_1b_0)}^{p_1} + \overbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}^{p_2} + \dots + \underbrace{\sum_{i+j=k} a_i b_j}_{p_3} + \dots$$

Dlaczego? Wyobraźmy sobie, że zamiast dwóch sum mnożymy 2 „nieskończone wielomiany":

$(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots)$.

Gdy urwiemy je na pewnej ($n$-tej) potędze:

$(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n)$

to ~~az~~ wymnażając otrzymamy

$p_0+p_1x+p_2x^2+\dots+p_nx^n+$ (dalej się chrzani).

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ jest dobrym kandydatem na iloczyn szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Takie szeregi – szeregi potęgowe – będziemy badać starannie zapewne w przyszłym semestrze.

Definicja: Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$, gdzie $p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Oczywiście (jak dowiedliśmy) iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów bezwzgl. zbieżnych $\sum a_n$ i $\sum b_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a jego suma jest równa $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$. Jak jednak pokazuje przykład (pochodzący jeszcze od Cauchy'ego) na zastąpienie szeregów bezwzgl. zbieżnych po prostu zbieżnymi nie możemy w tym twierdzeniu liczyć:

$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$. Z kryt. Leibniza $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny (warunkowo).

$a_0 = b_0 = 0$

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}} \cdot (-1)^{n-i-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n-i}}$$

Każde z wyrażeń $\frac{1}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-i}}$ jest większe od $\frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n-1}} =$

$= \frac{1}{n-1}$. Mamy zatem $|p_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n-i}} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1} =$

$= \frac{n-1}{n-1} = 1$, a więc szereg $\sum p_n$ nie może być zbieżny.

Zagadka: Czy sumując ten sam iloczyn szeregów „po kwadratach" dostaniemy szereg zbieżny?

Nie jest jednak tak źle, jak można by się spodziewać:

Twierdzenie (Mertensa o mnożeniu szeregów)
Niech szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą zbieżne, w tym co najmniej jeden z nich – bezwzględnie. Wówczas iloczyn Cauchy'ego $\sum p_n$ tych szeregów jest zbieżny oraz $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dowód:

Franz (Franciszek) Mertens
ur. 1840 w Środzie Wlkp., zm. 1927 w Wiedniu
urodzony w rodzinie niemieckojęzycznej, używał jednak obu wersji imienia.
Studiował w Berlinie u Weierstrassa, Kummera i Kroneckera. W latach 1865–1884 wykładał na UJ, potem na politechnice w Grazu i na Uniwersytecie Wiedeńskim – tam uczył m. in. Schrödingera.
Znany przede wszystkim z osiągnięć w analitycznej teorii liczb.

Oznaczmy, jak zwykle, sumy częściowe szeregów odpowiednio przez $A_n$, $B_n$ i $P_n$ i załóżmy, że to szereg $A_n$ jest bezwzględnie zbieżny.
Mamy wykazać, że $\lim_{n\to\infty} P_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} A_n}_{A} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} B_n}_{B}$.

Mamy $P_n = \sum_{i+j\le n} a_i b_j = a_0(b_0+\ldots+b_n) + a_1(b_0+\ldots+b_{n-1})$
$+\ldots + a_{n-1}(b_0+b_1) + a_n b_0 = a_0 B_n + a_1 B_{n-1}$
$+\ldots + a_n B_0$. Stąd

$$A_n B_n - P_n = a_0 B_n + a_1 B_n + \ldots + a_n B_n -$$
$$- a_0 B_n - a_1 B_{n-1} - \ldots - a_n B_0 =$$
$$= a_1 (B_n - B_{n-1}) + a_2 (B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_n (B_n - B_0).$$

Wiemy, że ciągi $\left(\sum_{k=0}^{l} |a_k|\right)$ oraz $(B_l)$ są zbieżne - więc są ograniczone, czyli istnieje $M>0$ że.

$$\forall_{l\in\mathbb{N}} \quad |a_0|+\dots+|a_l|<M, \qquad |B_l|<M.$$

Mamy też warunek Cauchy'ego, spełniony dla ciągu $(B_l)$: $\forall_\varepsilon \exists_{n_0} \forall_{k,m>n_0}$

$$|B_k-B_m|<\varepsilon/4M$$

Dddn. ($n>n_1$) mamy też nierówności

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{8M}, \qquad |A_nB_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech $n_2=\max(n_1,n_0)$ — dla $n>n_2$ zachodzą wszystkie powyższe nierówności. Wtedy, dla $n>2n_2$

$$|AB-P_n| \le |AB-A_nB_n| + |A_nB_n - P_n| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + |a_1||B_n-B_{n-1}| + |a_2||B_n-B_{n-2}|+\dots+$$

$$+\dots+ |a_{n_2}||B_n - B_{n-n_2}| + |a_{n_2+1}||B_n - B_{n-n_2-1}| + \dots + |a_n||B_n-B_0|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + (|a_1|+\dots+|a_{n_2}|)\cdot\frac{\varepsilon}{4M} + (|a_{n_2+1}|+\dots+|a_n|)\cdot 2M <$$

$(<|a_{n_2+1}|+\dots\ )$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{8M}\cdot 2M = \varepsilon.$$

$\square$.

Wróćmy na chwilę do szeregu harmonicznego. Wykazaliśmy, że $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma\approx 0{,}577$.
Innymi słowy $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+a_n$, gdzie $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Wynik ten pozwoli nam obliczyć sumę szeregu anharmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\cdot\frac{1}{n}$
Z kryt. Leibniza wiemy, że jest on warunkowo zbieżny, a więc istnieje granica ciągu $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$

Z drugiej strony $S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$

$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}-\ldots-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(2n)+\gamma+a_{2n}-\ln n-\gamma-a_n$$

$$=\ln 2+\cancel{\ln n}+\cancel{\gamma}+a_{2n}-\cancel{\ln n}-\cancel{\gamma}-a_n=$$

$$=\ln 2+a_{2n}-a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln 2$$

czyli podciąg $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do $\ln 2$, a zatem cały ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ też.

Teraz podamy twierdzenie pochodzące od Cesàro, mówiące, co się dzieje, gdy pomnożymy dwa szeregi zbieżne (ale bez założenia Mertensa, że jeden z nich jest bezwzgl. zbieżny). Ze względu na Cesàro szereg $\sum p_n$ oznaczać będziemy tym razem przez $\sum c_n$, a jego ciąg sum częściowych przez $C_n$.

Ernesto Cesàro. 1859-1906 syn rolnika spod Neapolu, kształcił się w Liège i Paryżu, potem pracował w Palermo i Neapolu. Zajmował się teorią liczb, teorią szeregów, fizyką matematyczną (t. elastyczności) i przede wszystkim geometrią różniczkową – zawdzięczamy mu pojęcie geometrii wewnętrznej oraz tego, co dziś nosi nazwę trójnogu Freneta krzywej.

Mamy więc 2 szeregi zbieżne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$, analog. $B$ i $B_n$.

Wówczas (teza tw. Cesàro)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_0 + C_1 + \dots + C_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = AB.$$

---

Czyli – mimo, że (patrz przykład Cauchy'ego z popr. wykładu) szereg $\sum c_n$ nie musi być zbieżny, to ciąg średnich arytm. jego kolejnych sum częściowych jest zbieżny.

107 Dowód tw. Cesàro

Jak już liczyliśmy na poprzednim wykładzie,

$$C_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) =$$
$$= a_0B_n + a_1B_{n-1} + a_2B_{n-2} + \ldots + a_nB_0 \text{, skąd}$$

$$C_0 = a_0B_0$$
$$C_1 = a_0B_1 + a_1B_0$$
$$C_2 = a_0B_2 + a_1B_1 + a_2B_0$$
$$\ldots$$
$$+ \quad C_n = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0$$

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_n = A_nB_0 + A_{n-1}B_1 + \ldots + A_1B_{n-1} + A_0B_n$$

$$\frac{C_0 + C_1 + \ldots + C_n}{n+1} = \frac{A_nB_0 + A_{n-1}B_1 + \ldots + A_{n-k}B_k + \ldots + A_0B_n}{n+1}$$

$$\left|\frac{C_0 + C_1 + \ldots + C_n}{n+1} - AB\right| = \left|\frac{(A_nB_0 - AB) + (A_{n-1}B_1 - AB) + \ldots + (A_0B_n - AB)}{n+1}\right|$$

$$\leq \frac{|A_nB_0 - AB|}{n+1} + \frac{|A_{n-1}B_1 - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_{n-k}B_k - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_0B_n - AB|}{n+1} = (*)$$

Chcemy wykazać, że (*) jest $< \varepsilon$.
mianowniki coraz większe, liczniki ograniczone, ale liczba wyrazów rośnie – trzeba uważać!
Trzeba jakoś skorzystać z tego, że $A_n \to A$, $B_n \to B$, więc jeżeli $i, j$ są duże, to $|A_iB_j - AB|$ jest małe – a więc małe są wyrazy w środku sumy. Tyle intuicji, teraz twarde rachunki:

- ciągi $(A_n)$ i $(B_n)$ są zbieżne, więc ograniczone, $\exists_M \forall_n \; |A_n| \le M, \; |B_n| \le M$ (wtedy $|A| \le M$, $|B| \le M$)
- $M$ jest już ustalone. Teraz $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon} \forall_{n>n_\varepsilon}$

$$|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

(w zasadzie dla każdego z ciągów $(A_n)(B_n)$ wybieramy różne $n_\varepsilon^A$ i $n_\varepsilon^B$, ale możemy potem wziąć $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon^A, n_\varepsilon^B)$ dobre dla obu.

- na koniec kładziemy $m_\varepsilon = \max\left(\frac{8M^2(n_\varepsilon+1)}{\varepsilon}, n_\varepsilon\right)$ (wówczas dla $n > m_\varepsilon$ mamy $\frac{2M^2(n_\varepsilon+1)}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$.), ~~$m_\varepsilon = \max(\ldots)$~~.

Teraz: po pierwsze, dla dowolnych $i,j$ mamy

$$|A_iB_j - AB| \le |A_i||B_j| + |A||B| \le 2M^2$$

Jeżeli zaś $i,j > m_\varepsilon$, to

$$|A_iB_j - AB| = |(A_i - A)B_j + A(B_j - B)| \le$$
$$\le |A_i - A||B_j| + |A||B_j - B| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot M + M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dzielimy teraz $(*)$ na końce i środek (w którym indeksy przy $A_\circ$ i $B_\circ$ są $> m_\varepsilon$).

$$* = \underbrace{\frac{|A_nB_0 - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{A_{n-m_\varepsilon}B_{m_\varepsilon} - AB}{n+1}}_{m_\varepsilon+1 \text{ wyrazów}} +$$

$$\underbrace{+ \frac{|A_{n-m_\varepsilon-1}B_{m_\varepsilon+1} - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_{m_\varepsilon+1}B_{n-m_\varepsilon-1} - AB|}{n+1}}_{n-2m_\varepsilon-1 \text{ wyrazów}}$$

$$\underbrace{+ \frac{|A_{m_\varepsilon}B_{n-m_\varepsilon} - AB|}{n+1} + \ldots + \frac{|A_0B_n - AB|}{n+1}}_{m_\varepsilon+1 \text{ wyrazów}} \le$$

$$\le \underbrace{\frac{m_\varepsilon+1}{n+1}\cdot 2M^2}_{<\varepsilon/4} + \underbrace{\frac{n-2n_\varepsilon-1}{n+1}}_{<1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{n_\varepsilon+1}{n+1}2M^2}_{<\varepsilon/4} < \varepsilon.$$

(109) cyli $\left| \frac{C_0+C_1+\ldots+C_n}{n+1} - AB \right| < \varepsilon$ dla $n > m_\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{C_0+C_1+\ldots+C_n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} AB$$

D.

<u>Wniosek z tw. Cesàro.</u>

Niech $\sum a_n$, $\sum b_n$ będą zbieżne i niech dodatkowo zbieżny będzie ich iloczyn Cauchy'ego $\sum c_n$. Wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_{= A} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n}_{= B}.$$

<u>Dowód:</u>

Z tw. Cesàro wiemy, że $(C_n = \sum_{k=0}^{n} c_n)$ ciąg $\frac{C_0+C_1+\ldots+C_n}{n+1}$ dąży do $AB$. Wiemy też, że ciąg $(C_n)$ ma granicę - oznaczmy ją przez $C$. Z tw o średnich ciągu (albo np. z lematu Stolza)

$AB = \lim \frac{C_0+C_1+\ldots+C_n}{n+1} = \lim C_n$ (o ile tylko ta ostatnia granica istnieje - tak jednak jest w naszym przypadku).

Do dalszego ciągu potrzebne nam będzie następujące twierdzenie (o jednoznaczności funkcji wykładniczej)

Tw. Jeżeli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

① $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ f(x+y) = f(x) f(y)$

② dla każdego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_n \neq 0\ \forall_n$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-1}{n} = A$$

to $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = e^{Ax}$.

Dowód: z ① mamy, że $\forall_y\ f(0+y) = f(0)\cdot f(y)$, $f(0+y) = f(y)$,

a więc $f(0)=1$.

Dla $x \neq 0$ połóżmy $a_n = \frac{x}{n}$. Oczywiście $a_n \to 0$, więc

$$w_n = \frac{f(\frac{x}{n})-1}{x/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} A. \qquad f\left(\frac{x}{n}\right) = 1 + w_n \cdot \frac{x}{n}.$$

Znów z ① mamy $\forall_n\ f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + w_n \cdot \frac{x}{n}\right)^n =$

$$= \frac{\left(1+w_n\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{Ax}{n}\right)^n} \cdot \left(1+\frac{Ax}{n}\right)^n = \left(\frac{n+w_n x}{n+Ax}\right)^n \cdot \left(1+\frac{Ax}{n}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{(w_n-A)x}{n+Ax}\right)^n}_{\downarrow\ 1} \cdot \left(1+\frac{Ax}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot e^{Ax}$$

z tw. o ciągach szybko zbieżnych do 1 ($(1+b_n)^n \to 1$, jeżeli $n b_n \to 0$). Sprawdźmy:

$$n\frac{(w_n-A)x}{n+Ax} = \underbrace{\frac{nx}{n+Ax}}_{\downarrow\ x} \cdot \underbrace{(w_n - A)}_{\downarrow\ 0} \longrightarrow 0.$$

$\square$.

(111)

Dla każdych $a \in \mathbb{R}$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$ definiujemy <u>symbol Newtona</u>

$$\binom{a}{0} = 1 \quad , \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$$

Mamy (dowód – dodawanie ułamków)

$$① \binom{a}{n-1} + \binom{a}{n} = \binom{a+1}{n} \qquad ② \binom{a+1}{n} = \frac{a+1}{n}\cdot\binom{a}{n-1}$$

<u>Twierdzonko</u>: $\forall_{a\in\mathbb{R}}$ i $\forall_x : |x|<1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ jest zbieżny bezwzględnie

<u>Dowód</u>: kryt. d'Alemberta przyłożone do $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{a}{n}x^n\right|$ :

$$\left|\frac{\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{\binom{a}{n}x^n}\right| \overset{②}{=} \left|x\cdot\frac{a-n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x| \quad \square$$

Oznaczmy $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n = f(a)$ (oczywiście f zależy też od x).

Z twierdzeń o mnożeniu szeregów mamy

$$f(a)\cdot f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n \overset{\text{iloczyn Cauchy'ego}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k\cdot\binom{b}{n-k}x^{n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = *$$

Skorzystamy teraz z tożsamości (dowód za chwilę)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \qquad (**)$$

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \binom{a+b}{n} = f(a+b)$$

Zatem $f$ ma tę własność, że $f(a)f(b) = f(a+b)$.

Jeżeli tylko wykażemy, że istnieje takie $A$, że $\forall (a_n): a_n \to 0,\ \forall_n\, a_n \neq 0$ $\quad \frac{f(a_n)-1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$, to będziemy wiedzieli, że $f(a) = e^{Ax}$

$$\underset{\displaystyle \sum \binom{a}{n} x^n.}{\overset{\shortparallel}{f(a)}}$$

To za chwilę, na razie dowód tożsamości:
(indukcja) Dla $n=0$ zgadza się; załóżmy, że $(**)$ zachodzi dla pewnego $n$ i dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.
Chcemy wykazać, że

$$\binom{a+b}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k+1}$$

$$\binom{a+b}{n+1} = \frac{a+b}{n+1}\binom{a+b-1}{n} = \frac{1}{n+1}\left[a\binom{a+b-1}{n} + b\binom{a+b-1}{n}\right]$$

$$\overset{\text{z.I.}}{=} \frac{1}{n+1}\left[a \cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{a-1}{k}\binom{b}{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b-1}{n-k}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{a}{k+1}\binom{a-1}{k}}_{\binom{a}{k+1}}\binom{b}{n-k}(k+1) + \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\underbrace{\binom{b-1}{n-k}\frac{b}{n-k+1}}_{\binom{b}{n-k+1}}(n-k+1)\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{\substack{l=1 \\ \uparrow \\ l=k+1}}^{n+1}\binom{a}{l}\binom{b}{n-l+1}\cdot l + \sum_{\substack{l=0 \\ \uparrow \\ l=k}}^{n}\binom{a}{l}\binom{b}{n-l+1}(n-l+1)\right] = \sum_{l=0}^{n+1}\binom{a}{l}\binom{b}{n-l+1}.$$

Teraz szukamy $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{f(a_m)-1}{a_m}$ przy założeniu, że $a_m \to 0$, $\forall_m\, a_m \neq 0$

Mamy
$$\frac{f(a_m)-1}{a_m} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_m(a_m-1)\dots(a_m-n+1)}{n!}x^n - 1}{a_m}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_m-1)\dots(a_m-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-a_m)\left(1-\frac{a_m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-a_m)\left(1-\frac{a_m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\cdot\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = (*)_m$$

Do czego dąży $(*)_m$ przy $m \to \infty$?

Uwaga: pytamy o granicę SUMY szeregu $(*)_m$ – to często nie to samo, co suma granicy wyrazów. Gdybyśmy jednak mogli po prostu przejść w każdym z wyrazów szeregu $(*)_m$ z $m$ do $\infty$, dostalibyśmy szereg

$$(**) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Łatwo można sprawdzić, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny (kryt. d'Alemberta) dla $|x| < 1$.

Wykażemy teraz, że w tym przypadku rzeczywiście $\lim\limits_{m\to\infty}(*)_m = (**)$.

(114) Potrzebujemy do tego 2 oszacowań na „ogony" szeregów $(*)_m$ i $(**)$. Z drugim jest łatwo – $(**)$ jest bezwzgl. zbieżny, więc

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k_0}\ \cancel{\forall_{k\geq k_0}}\quad \text{(A)}\ \sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}<\varepsilon \quad \text{(dla ustalonego } x\text{)}.$$

Chcemy też mieć podobne – ale niezależne od $m$ – oszacowanie na ogon $(*)_m$.

Skoro $a_m\to 0$, to dla $m>m_0$ mamy $|a_m|<\frac{1}{2}$.

Stąd $\qquad 1+x\leq e^x$

$$\left|(1-a_m)\left(1-\frac{a_m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\right|\leq e^{-a_m}e^{-\frac{a_m}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{a_m}{n}}=$$

$$=e^{-a_m\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\leq e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\leq e^{\frac{1}{2}(\ln(n+1)+1)}=\sqrt{e}\sqrt{n+1}$$

stąd $\left|(1-a_m)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right|\leq\sqrt{e}\,\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$;

szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{e}\,\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ jest zbieżny, więc $\forall_\varepsilon\ \exists_{k_1}$

tż $\sum_{n=k_1+1}^{\infty}\sqrt{e}\,\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon$, ale wówczas

(B)
$$\left|\sum_{n=k_1+1}^{\infty}(1-a_m)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right|\leq\sum_{n=k_1+1}^{\infty}\left|(1-a_m)\dots\left(1-\frac{a_m}{n}\right)\right|\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leq$$

$$\leq\sum_{n=k_1+1}^{\infty}\sqrt{e}\,\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$ Biorąc $k\geq\max(k_0,k_1)$ z tym samym $k$ mamy nierówności (A) i (B) z tym samym $k$ i $\varepsilon$.

Oszacujmy teraz, dla $m > m_0$, różnicę $|(*)_m - (**)|$.

$$\left|(*)_m - (**)\right| \leq \sum_{n=0}^{k} \left|\left(1-a_m\right)\cdots\left(1-a_m/n\right) - 1\right| \frac{|x|^{n+1}}{n+1} +$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\left(1-a_m\right)\cdots\left(1-a_m/n\right)\right| \frac{|x|^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} <$$

$$< \underbrace{\sum_{n=0}^{k} \left|\left(1-a_m\right)\cdots\left(1-\frac{a_m}{n}\right) - 1\right| \frac{|x|^{n+1}}{n+1}} + 2\varepsilon$$

to jest skończona suma, której każdy składnik dąży, przy $m \to \infty$, do $0$ — a więc cała suma też dąży przy $m \to \infty$ do $0$ $\Longrightarrow$ dla $m > m_1$ jest $< \varepsilon$. Stąd dla $m > \max(m_0, m_1)$

mamy
$|(*)_m - (**)| < 3\varepsilon$, co dowodzi, że $(*)_m \xrightarrow{m \to \infty} (**)$.

No to mamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-1}{a_n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=L(x).$$

stąd $\forall_x\ f(a)=e^{a\cdot L(x)}=\left[e^{L(x)}\right]^a$

Z drugiej strony dla $a=1$ mamy

$f(1)=1+x$ (pozostałe symbole Newtona są 0).

cyli $\forall_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ |x|<1}}\quad e^{L(x)}=1+x\ ,\ f(a)=(1+x)^a$

(a poza tym $L(x)=\ln(1+x)$ i mamy, że dla $|x|<1$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\ ).$$

Ostatecznie dostajemy wzór dwumianowy Newtona dla dowolnej potęgi rzeczywistej (i $|x|<1$):

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n.$$

# GRANICE FUNKCJI

1. Co to jest funkcja? ~~Nas będą intereso~~
Przyporządkowanie elementom zbioru A elementów zbioru B tak, by jednemu $a \in A$ przyporządkowano dokładnie jeden element $f(a)$ zbioru B.

Nas będą interesowały funkcje liczbowe – a więc takie, które są określone na A będącym podzbiorem $\mathbb{R}$, ew. $\mathbb{C}$. Uwaga: A nazywamy <u>dziedziną</u> $f$; gdy definiujemy $f$, musimy podać, jaka jest dziedzina – to element definicji. A priori funkcja $x^2$ określona na $[0,\infty)$ to inna funkcja, niż $x^2$ określona na $\mathbb{R}$ (ta pierwsza jest np. funkcją rosnącą, a druga – nie).

Na poprzednim wykładzie podałem 2 definicje granicy funkcji $f$ w punkcie $x_0$ ~~należącym do dziedziny~~:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = g, \text{ gdy}}$$

<u>Def. Cauchy'ego</u>: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \, (0<|x-x_0|<\delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$.

<u>Def. Heinego</u> ~~$\forall$~~ Dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów dziedziny zbieżnego do $x_0$ i takiego, że $\forall_n \; x_n \neq x_0$, mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

<u>Pytanie</u>: Czy taka definicja zawsze ma sens?

Rozważmy funkcję $f$ określoną na $\mathbb{N}$, np $f(x)=x$.

(118) – dziedziną $f$ są liczby naturalne.
Czy jest sens pytać o $\lim_{x \to 2} f(x)$?
Popatrzmy na def. Heinego: dla każdego ciągu $(x_n)$ dążącego do 2, $x_n \in \mathbb{N}$, $\forall_n \; x_n \neq 2$ ... Ile jest takich ciągów? Zero!

Na to, by sensownie pytać o granicę funkcji $f$ określonej na zbiorze $A$, w punkcie $x_0$, muszą istnieć ciągi elementów $A \setminus \{x_0\}$ zbieżne do $x_0$.

Def: Mówimy, że $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ jest punktem skupienia zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje ciąg $(x_n)$ elementów $A \setminus \{x_0\}$

. . .

Granicę funkcji $f$ jest sens liczyć tylko w punktach skupienia jej dziedziny.
Jakie są pkty skupienia $\mathbb{N}$?
Granicą ciągu liczb naturalnych jest albo liczba naturalna, albo $\infty$, ale jeżeli $n_k \to m \in \mathbb{N}$, to od pewnego $k$ wszystkie wyrazy $(n_k)$ muszą być równe $m$ (bo muszą być bliżej $m$ niż $\frac{1}{2}$ – a w przedziale $(m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$ nie ma innych liczb naturalnych). Nie ma więc ciągów o elementach w $\mathbb{N} \setminus \{m\}$ zbieżnych do $m$.
Zostaje tylko $\infty$ – i rzeczywiście, rozpatrując funkcje określone na $\mathbb{N}$ — ciągi liczbowe — zajmowaliśmy się tylko ich granicami przy $n \to \infty$.

Przykłady Punkty skupienia $(0,1)$ to $[0,1]$

$\mathbb{Q}$ to $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$[0,1]\setminus\{\frac{1}{n}\}$ to $[0,1]$

~~itd~~.

$(0,1)\cup\mathbb{N}$ to $[0,1]\cup\{+\infty\}$

Uwaga o dowodzie równoważności obu definicji:

Przy dowodzie Heine $\Rightarrow$ Cauchy

nie wprost: zachodzi warunek Heinego, oraz zaprzeczenie war. Cauchy'ego:

$\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{\delta>0}\ \exists_x\ 0<|x-x_0|<\delta \wedge |f(x)-g|>\varepsilon$

w szczególności zbiór $A_k=\{x\in\mathbb{R}: 0<|x-x_0|<\frac{1}{k},\ |f(x)-g|>\varepsilon\}$

jest, dla każdego $k$, niepusty.

Możemy skorzystać z pewnika wyboru:

i wybrać ciąg $(x_k)$ t.ż. $x_k\in A_k$.

Dla dowolnej rodziny rozłącznych zbiorów niepustych $\{B_i\}_{i\in I}$ istnieje zbiór mający z każdym z $B_i$ dokładnie jeden punkt wspólny.

Równoważnie: dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów $\{A_i\}_{i\in I}$ istnieje „funkcja wyboru" $f: I\to\bigcup_{i\in I}A_i$ taka, że $\forall_{i\in I}\ f(i)\in A_i$.

Korzystamy z tej drugiej wersji.

Mamy $0<|x_k-x_0|<\frac{1}{k}$,

więc $\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$,

$x_k\neq x_0$

więc z warunku

Heinego powinno być $\lim_{k\to\infty}f(x_k)=g$, ale $\forall_k\ |f(x_k)-g|>\varepsilon$ $\lightning$

Uwaga: jeżeli $x_0=+\infty$ (lub $-\infty$), to w def. Heinego nic nie trzeba zmieniać, ale w Cauchy'ego tak:

$g=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}}f(x)\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_M\ \forall_{x\in A}\ \underset{(x<M)}{(x>M)}\Rightarrow|f(x)-g|<\varepsilon$

a gdy $g=\pm\infty$, $x_0\in\mathbb{R}$: $\forall_M\ \exists_\delta\ (0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow f(x)>M$ $(<M)$

co gdy $x_0=\pm\infty$, $g=\pm\infty$?

120

Przykłady granic: wykazaliśmy już, że:

$\forall_{b_n \to b} \quad e^{b_n} \to e^b$

więc $\lim\limits_{x \to b} e^x = e^b$ (ciągłość funkcji wykł.)

$$\forall_{\substack{b_n \to 0 \\ b_n \neq 0}} \quad \frac{e^{b_n}-1}{b_n} \longrightarrow 1, \quad \text{więc}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

analogicznie

$\forall_{\substack{b_n \to b \\ b \in [0,\infty] \\ b_n \in (0,\infty)}} \quad \ln b_n \to \ln b$ (przy umowie $\ln 0 = -\infty$, $\ln \infty = \infty$)

czyli $\lim\limits_{x \to b} \ln x = \ln b$

oraz $\forall_{0 \neq b_n \to 0} \quad \dfrac{\ln(1+b_n)}{b_n} \to 1$, czyli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

i niedawno $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(czy było? Jeżeli nie, to

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

i dla $0 < x < 1$ mamy oczywiście $\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} > \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (*)

$$\sin x = x - \underbrace{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right)}_{>0} - \dots < x$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \dots \quad > x - \frac{x^3}{3!}$$

stąd, dla $x \in (0,1)$ $\quad 1 - \dfrac{x^2}{6} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$