

Zadania ze złożoności Kolmogorowa i złożoności komunikacyjnej.

1. Niech $\text{MAJ} : \{1, \dots, n\}^n \times \{1, \dots, n\}^n \rightarrow \{1, \dots, n\}$ będzie określona jak następuje: $\text{MAJ}(x, y)$ to taki element $\{1, \dots, n\}$, który w konkatencji ciągów x i y występuje największą liczbę razy, przy czym w razie istnienia kilku takich elementów, należy zwrócić ten największy.

Przykładowo,

$$\text{MAJ}((1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 3, 2, 5)) = 3$$

$$\text{MAJ}((5, 2, 5, 4, 5), (2, 3, 3, 2, 5)) = 5.$$

Udowodnić, że $D(\text{MAJ}) = \Theta(n)$.

2. Niech W będzie zbiorem wszystkich liczb $x \in [0, 1]$ takich, że ich rozwinięcie binarne $x = 0.\omega$, gdzie $\omega \in \{0, 1\}^\infty$, spełnia warunek $C(\omega_{1:n}) = \mathcal{O}(\log n)$. Pokazać, że W jest zamknięty na mnożenie i pierwiastkowanie, tzn. dla $x, y \in W$ mamy $x \cdot y \in W$ i $\sqrt{x} \in W$.
3. Rozważmy, dla danej uniwersalnej maszyny Turinga U , złożoność $L_f(x)$ zdefiniowaną jak następuje:

$$L_f(x) = \min\{|p| : H(U(p), x) \leq f(|x|)\},$$

gdzie $f : N \rightarrow N$ jest ustaloną funkcją spełniającą $f(n) \leq n$, a H jest odległością Hamminga.

Zadaniem jest wykazanie, że jest to sensowna miara złożoności i zbadanie jej własności oraz wskazanie jej potencjalnych zastosowań. Jest to zadanie otwarte, które ma wiele dobrych rozwiązań.

4. Rozważmy prostokątną siatkę $n \times n$. Wierzchołki sąsiadujące ze sobą w pionie są połączone krawędzią skierowaną do góry. Wierzchołki sąsiadujące w poziomie są połączone krawędzią skierowaną z prawdopodobieństwem p w lewo i z prawdopodobieństwem $1 - p$ w prawo. Pokazać, że wartość oczekiwana maksymalnej długości ścieżki w takim grafie jest co najwyżej rzędu $\mathcal{O}(n \log n)$.