. . . .
imię, nazwisko, numer indeksu

Egzamin z RPiS (część I, 10 lutego 2022)

Zadanie 1 (1 punkt)**.** Niech $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$, $P(B|\Omega - A) = \frac{3}{5}$. Policz $P(A|B)$.

$P(A|B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 2 (1 punkt)**.** Niech X będzie zmienną losową określającą wynik rzutu kostką sześcienną.

Wówczas $E(2^X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Czy następujące zdania są prawdziwe? Wpisz: (A) są prawdziwe zawsze, (B) są prawdziwe tylko przy założeniu niezależności parami, (C) są prawdziwe tylko przy założeniu pełnej niezależności, (D) mogą być nieprawdziwe nawet gdy założymy pełną niezależność.

$E(X - Y + Z) = EX - EY + EZ$ ......

$\mathrm{Var}(X - Y + Z) = \mathrm{Var}X - \mathrm{Var}Y + \mathrm{Var}Z$ ......

$E(XY/Z) = EX \cdot EY/EZ$ ......

Zadanie 4 (3 punkty)**.** Niech X_1, X_2 będą zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o funkcji tworzącej g_X, a $P(L = 1) = P(L = 3) = \frac{1}{2}$. Wszystkie zmienne losowe X_1, X_2 i L są niezależne.
Niech $Y = X_1 + X_2$, $Z = 3X_1$, $T = X_1L$. Wyraź następujące funkcje tworzące przez g_X:

$g_Y(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$g_Z(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$g_T(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 5 (2 punkty)**.** Co można powiedzieć o $P(X \geq 2)$, jeśli wiemy, że:

(a) jeśli $X \geq -5, EX = 1$, to $P(X \geq 2) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) jeśli $EX = -2, \sigma(X) = 2$, to $P(X \geq 2) \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 6 (1 punkt)**.** Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej 5 i wariancji 4. Wyraź dystrybuantę F_X przy użyciu Φ, dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

$F_X(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 7 (3 punkty)**.** Dla których z następujących łańcuchów Markowa $(X_0, X_1, \ldots)$ o stanach $\{0, 1, 2, 3\}$ istnieje taki rozkład π, że niezależnie od rozkładu X_0 mamy $\lim_{k\to\infty} P(X_k = i) = \pi_i$? Krótko uzasadnij odpowiedzi (rozwiązanie bez uzasadnienia warte jest połowę punktów).

- ze stanu k przechodzimy do stanu $(k+1) \bmod 4$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $(k-1) \bmod 4$ z prawdopodobieństwem $1/2$

  $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- ze stanu $k = 1, 2$ przechodzimy do stanu $k-1$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $k+1$ z prawdopodobieństwem $1/2$; w stanach $k = 0, 3$ z prawdopodobieństwem 1 zostajemy w tych stanach

  $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- ze stanu k przechodzimy do stanu $3-k$ z prawdopodobieństwem $1/2$ i do stanu $(k+1) \bmod 3$ z prawdopodobieństwem $1/2$

  $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Zadanie 8 (5 punktów)**.** Maszyna losująca losuje niezależnie liczby Y, Z z rozkładu jednostajnego dyskretnego na przedziale $\{1, \ldots, k\}$ $(k \geq 1)$, następnie zwraca $X = Y - Z$. W dwóch losowaniach otrzymaliśmy wyniki $2, -2$.

- funkcja wiarygodności to

  $L(k; 2, -2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- jaką wartość parametru k otrzymamy metodą największej wiarygodności?

  $\hat{k}(2, -2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- niech $\hat{k_2}(X_1, \ldots, X_n) = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\} + 1$. Wówczas estymator $\hat{k_2}$ jest: (tak/nie)
  (a) estymatorem nieobciążonym ......
  (b) estymatorem asymptotycznie nieobciążonym ......
  (c) estymatorem zgodnym ......

Zadanie 9 (1 punkt)**.** Badacz przeprowadził test statystyczny na poziomie istotności $\alpha = 0,1$. Otrzymał p-wartość (p-value) równą 0,06. Wskaż zdanie prawdziwe:

A Poziom istotności testu wynosił 0,1, czyli z prawdopodobieństwem 0,9 badacz nie odrzucał prawdziwej hipotezy zerowej

B Uzyskane p-value było mniejsze niż założony poziom istotności, czyli badacz nie miał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu

C Skoro poziom istotności testu wynosił 0,1, to z prawdopodobieństwem 0,9 badacz odrzucał błędną hipotezę zerową

D Bez dokładnej informacji, jakie były hipotezy zerowa i alternatywna, nie możemy podać, czy były podstawy czy nie do odrzucenia hipotezy zerowej.