. . . .
imię, nazwisko, numer indeksu

Egzamin z RPiS (część I - 45 minut, 5 lutego 2019)

Zadanie 1 (1 punkt)**.** Niech $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{4}{5}$, $P(B|\Omega - A) = \frac{4}{15}$. Policz $P(A|B)$.

Zadanie 2 (5 punkty)**.** Dla następujących wzorów wpisz A (zachodzi zawsze), B (zachodzi dla zmiennych parami niezależnych), C (zachodzi dla zmiennych niezależnych), lub D (może nie zachodzić nawet dla zmiennych niezależnych).

. . . . . . $E(X + Y - Z) = E(X) + E(Y) - E(Z)$

. . . . . . $\mathrm{Var}(X + Y + Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z)$

. . . . . . $E(X \cdot Y \cdot Z) = E(X) \cdot E(Y) \cdot E(Z)$

. . . . . . $E\left(\frac{X}{Y+Z}\right) = \frac{EX}{EY+EZ}$

. . . . . . $g_{X+Y+Z}(t) = g_X(t) \cdot g_Y(t) \cdot g_Z(t)$ (funkcje tworzące)

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Podaj najlepsze możliwe oszacowanie na $P(X \geq 100)$, o ile wiemy, że:

- $X \geq -10, EX = 30$

  $P(X \geq 100) \leq \ldots\ldots$

- $EX^2 = 50, \forall a P(X \geq a) = P(X \leq -a)$

  $P(X \geq 100) \leq \ldots\ldots$

- funkcja tworząca $g_X(10) = 10$

  $P(X \geq 100) \leq \ldots\ldots$

Zadanie 4 (2 punkty)**.** Załóżmy, że X jest ciągłą zmienną losową, a $Y = e^X$. Wyraź funkcję gęstości zmiennej losowej Y przy użyciu funkcji gęstości zmiennej losowej X.

$f_Y(t) = \ldots\ldots$

Zadanie 5 (2 punkty)**.** Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie Pois(10), a $Y \sim N(0,1)$. Dla jakiego $f(n)$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^n X_i > f(n)) = P(Y > 1)$?

$f(n) = \ldots\ldots$

Zadanie 6 (2 punkty)**.** Podaj przykład nieredukowalnego łańcucha Markowa o 3 stanach $\{1,2,3\}$, takiego, że średni czas powrotu dla stanu 2 jest równy 3, średni czas powrotu dla stanu 3 jest równy 6, $p_{23} = p_{32} = 0$.

Zadanie 7 (2 punkty)**.** Niech X ma rozkład χ^2 z 1 stopniem swobody. Policz EX i wyraź $P(X \leq EX)$ przy użyciu dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego Φ.

$EX = \ldots\ldots$ $\qquad\qquad$ $P(X \leq EX) = \ldots\ldots$

Zadanie 8 (3 punkty)**.** Symulator rzutu dwiema kostkami d-ściennymi losuje niezależnie dwie liczby z rozkładu jednostajnego dyskretnego na przedziale $[1,d]$ i zwraca ich sumę. Estymujemy parametr $d \in \mathbb{N}$ na podstawie wyniku k niezależnych losowań.

(1 punkt) Podaj (dowolny) estymator nieobciążony dla parametru d.

$\hat{d}_1(x_1, \ldots, x_k) = \ldots\ldots$

(2 punkty) W $k = 2$ losowaniach wylosowaliśmy 8 i 5. Jaką wartość parametru d daje metoda największej wiarygodności?

$\hat{d}_2(8,5) = \ldots\ldots$