

.....  
imię, nazwisko, numer indeksu

**Egzamin poprawkowy z RPiS (część I - 45 minut, 19 lutego 2018)**

**Zadanie 1** (1 punkt). Niech  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B|\Omega - A) = 0,3$ . Jaka jest najmniejsza i największa możliwa wartość  $P(B)$ ?

$$\dots \leq P(B) \leq \dots$$

**Zadanie 2** (1 punkt). Niech  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ( $n > 1$ ) będą zdarzeniami niezależnymi takimi, że  $P(A_k) = \frac{1}{e^k}$  dla  $k = 1, \dots, n$ . Jaka jest najmniejsza możliwa moc  $\Omega$ ?

**Zadanie 3** (4 punkty). Dla następujących wzorów wpisz A (zachodzi zawsze), B (zachodzi dla zmiennych niezależnych), lub C (może nie zachodzić nawet dla zmiennych niezależnych).

$$\dots E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$\dots E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\dots E(X/Y) = E(X)/E(Y)$$

$$\dots Var(X - Y) = Var(X) - Var(Y)$$

**Zadanie 4** (1 punkt). Niech  $X$  będzie zmienną losową taką, że  $X \geq a$ ,  $EX = b$ . Podaj najlepsze możliwe oszacowanie na  $P(X \geq c)$ , gdzie  $a \leq b \leq c$ .

$$P(X \geq 15) \leq \dots$$

**Zadanie 5** (2 punkty). Niech  $X$  będzie zmienną losową, której funkcja tworząca spełnia  $g_X(3) = 5$ . Oszacuj  $P(X \geq 5)$ . Wyjaśnij. (Wskazówka:  $g_X(t) = Et^X$ .)

$$P(X \geq 5) \leq \dots$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Zadanie 6** (2 punkty). Podaj zmienne losowe  $X, Y, Z$  takie, że  $P(X > Y) > \frac{1}{2}$ ,  $P(Y > Z) > \frac{1}{2}$ ,  $P(Z > X) > \frac{1}{2}$ .

**Zadanie 7** (2 punkty). Niech  $X_1, X_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie,  $EX = 5$ ,  $\text{Var}X = 10$ , a  $Y \sim N(0, 2)$ . Dla jakiego  $f(n)$  zachodzi  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^n X_i > f(n)) = P(Y > 1)$ ?

$$f(n) = \dots\dots$$

**Zadanie 8** (2 punkty). Podaj przykład **okresowego** łańcucha Markowa o 3 stanach, o rozkładzie stacjonarnym  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ .

**Zadanie 9** (3 punkty). Szacujemy parametr  $\mu$  na podstawie ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $N(\mu, 1)$ . Podaj przykład ciągu estymatorów zgodnego i asymptotycznie nieobciążonego.

Estymator obciążony, ale asymptotycznie nieobciążony i zgodny:

$$\hat{\mu}_1(x_1, \dots, x_n) = \dots\dots$$

Estymator zgodny, ale asymptotycznie obciążony:

$$\hat{\mu}_2(x_1, \dots, x_n) = \dots\dots$$

Estymator nieobciążony, ale niezgodny:

$$\hat{\mu}_3(x_1, \dots, x_n) = \dots\dots$$

**Zadanie 10** (2 punkty). Funkcja generuje zmienną losową  $X$  ze wzoru  $X = s + Y$ , gdzie  $Y \sim \text{Exp}(1)$ , a  $s$  jest nieznanym parametrem. Próbujemy oszacować parametr  $s$  na podstawie próby jednoelementowej. Podaj estymator nieobciążony i estymator największej wiarygodności.

Estymator nieobciążony:  $\hat{s}(x) = \dots\dots$

Estymator największej wiarygodności:  $\hat{s}(x) = \dots\dots$