. . . .
imię, nazwisko, numer indeksu

50% Polaków nie zdaje sobie sprawy,
że stanowi połowę społeczeństwa
miesięcznik Nowy Pompon

Egzamin z RPiS (część I - 60 minut, 29 stycznia 2013)

Zadanie 1 (1 punkt). Niech $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$. Podaj najmniejszą i największą możliwą wartość $P(B|A)$.

$$\ldots\ldots \leq P(B|A) \leq \ldots\ldots$$

Zadanie 2 (1 punkt). Niech $P(X = 1) = \frac{1}{3}, P(X = 2) = \frac{2}{3}$.

Wówczas $E(3^X) = \ldots\ldots$

Zadanie 3 (1 punkt). Niech $\Omega = A_1 \cup A_2$, $P(A_1) = 0{,}4$, $P(B|A_1) = 0{,}2$, $P(B|A_2) = 0{,}7$. Policz $P(A_1|B)$.

$P(A_1|B) = \ldots\ldots$

Zadanie 4 (2 punkty). Niech $X \sim Geo(0{,}9)$. Policz $P(X \geq 4)$ dokładnie i oszacuj z nierówności Markowa.

$P(X \geq 4) = \ldots\ldots$

$P(X \geq 4) \leq \ldots\ldots$

Zadanie 5 (2 punkty). Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji. Dla każdego z poniższych wzorów napisz A jeśli jest spełniony zawsze, B jeśli jest spełniony nie zawsze ale przy założeniu niezależności, C jeśli nawet dla niezależnych zmiennych nie musi zachodzić. Za dobrą odpowiedź 0,5 punktu, za złą -0,5 punktu.

- $\ldots\ldots E(XY) = EX\ EY$
- $\ldots\ldots g_X(t) + g_Y(t) = g_{X+Y}(t)$ (funkcje tworzące)
- $\ldots\ldots P(\min(X, Y) > 0) = P(X > 0)P(Y > 0)$
- $\ldots\ldots E(\max(X, Y)) = \max(EX, EY)$

Zadanie 6 (1 punkt). Niech X będzie zmienną losową o funkcji tworzącej g_X. Niech $Y = X + 1, Z = 2X$. Wyraź następujące funkcje tworzące przez g_X:

$g_Y(t) = \ldots\ldots$

$g_Z(t) = \ldots\ldots$

Zadanie 7 (2 punkty)**.** Funkcja gęstości zmiennej losowej X zadana jest wzorem $f_X(x) = ax^2 + bx$ dla $|x| \leq 1$, $f_X(x) = 0$ w przeciwnym przypadku. Podaj a i b.

$a = \ldots\ldots$ $\qquad\qquad\qquad$ $b = \ldots\ldots$

Zadanie 8 (2 punkty)**.** Niech $X \sim N(5, 1)$, $Y \sim N(3, 4)$, $Z = 2X + 3Y$, przy czym X i Y są niezależne. Jaki rozkład ma Z?

$Z \sim \ldots\ldots$

Zadanie 9 (2 punkty)**.** Załóżmy, że X jest ciągłą zmienną losową, a $Y = X^2$. Wyraź dystrybuantę F_Y przy użyciu dystrybuanty F_X. (Wskazówka: sprawdź, czy Twój wzór daje dobry wynik dla $F_Y(0)$.)

$F_Y(t) = \ldots\ldots$

Zadanie 10 (2 punkty)**.** Losujemy niezależnie $X_1, \ldots, X_n$ z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie parametry nie są znane. Niech $\hat{\mu} = X_1 + \ldots + X_n/n$. Dla każdego z poniższych estymatorów dla μ napisz, czy jest nieobciążony, asymptotycznie nieobciążony, zgodny. $[\varphi]$ oznacza tutaj notację Iversona.

- $\hat{\mu_1} = \hat{\mu} + [X_1 < X_2 < \ldots < X_n]n! - 1$

- $\hat{\mu_2} = \hat{\mu} + [X_{n-1} < X_n]/n$

Zadanie 11 (1 punkt)**.** Niech X ma rozkład t Studenta o 2 stopniach swobody, a Y ma rozkład χ^2 o 2 stopniach swobody. Podaj wartości dystrybuant w zerze:

$F_X(0) = \ldots\ldots$ $\qquad\qquad\qquad$ $F_Y(0) = \ldots\ldots$

Zadanie 12 (3 punkty)**.** Przy każdym uruchomieniu program zawiesza się (niezależnie) z prawdopodobieństwem p. Uruchamiamy program, aż się 2 razy zawiesi; przez X_1 i X_2 oznaczmy numer pierwszego i drugiego uruchomienia, przy którym program się zawiesił. Podaj funkcję wiarygodności i estymator największej wiarygodności dla p.

Funkcja wiarygodności:

Estymator największej wiarygodności: