

Kolokwium z RPiS, 23 stycznia 2023

Zadanie 1 (10 pkt). Mamy niebieską i zieloną kostkę sześcienną. Rzucamy niebieską kostką, uzyskując wynik X . Następnie rzucamy zieloną kostką, powtarzając rzut za każdym razem, gdy wypadnie X . Niech Y to suma wszystkich rzutów zieloną kostką.

Przykładowo: rzucamy niebieską kostką, wypadła $X = 4$. Rzucamy zieloną kostką, wypadła 4. Rzucamy zieloną kostką jeszcze raz, wypadła 4. Rzucamy zieloną kostką kolejny raz, wypadła 5. Wówczas kończymy losowanie i $Y = 13$.

Policz $P(X = x | X > 1, Y = 12)$ dla $x = 2, \dots, 6$.

Zadanie 2 (10 pkt). Rzucamy kostką k -ścienną $n \geq 10$ razy, uzyskując wyniki X_1, \dots, X_n . Sekwencją nazywamy takie trzy kolejne rzuty X_i, X_{i+1}, X_{i+2} , ze $X_i < X_{i+1} < X_{i+2}$. Niech S będzie zmienną losową określającą liczbę uzyskanych sekwencji (S przyjmuje wartości od 0 do $n - 2$).

- [5pkt.] Podaj wartość oczekiwaną X .
- [5pkt.] Podaj wariancję X .

Zadanie 3 (10 pkt). Inwersją w permutacji $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ nazywamy taką parę (i, j) , ze $i < j$, ale $\pi(i) > \pi(j)$. Niech X_n będzie liczbą inwersji w losowej permutacji $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. (Każda z $n!$ permutacji jest równie prawdopodobna.)

Policz funkcję tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej losowej X_n , $g_{X_n}(t)$. Wystarczy podać odpowiedź w postaci iloczynu (tzn. iloczynu $O(n)$ wyrażeń, z których każde jest w postaci zwartej).

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na osobnej kartce czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie odpowiedzi i obliczenia należy uzasadnić.

